DCF: Basic Concepts
Transversality

Lutz Kruschwitz & Andreas Löffler

Freie Universität Berlin, Germany

What happens if $T \to \infty$?

What happens to this equation

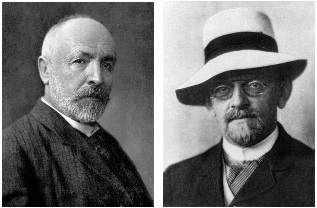
$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{CF}_{t+1}]}{1+r_f} + \frac{\mathrm{E}_t^Q\left[\widetilde{CF}_{t+2}\right]}{(1+r_f)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{E}_t^Q\left[\widetilde{CF}_T\right]}{(1+r_f)^{T-(t+1)}}$$

if the company's lifetime is infinite?

We have two valuation equations: one in terms of Q and one in terms of k_t. Why did we choose this one? Please hold on...

The problem with infinity

Infinity is notorious because our usual intuition breaks down.



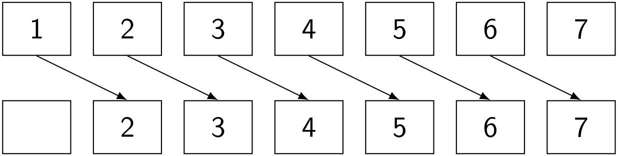
Georg Cantor (1845-1918) and David Hilbert (1862-1943); Wikipedia, public domain.

Hilbert's Hotel: What happens when a new guest arrives and the hotel is fully booked?

Wonderful videos, for example https://youtu.be/OxGsU8oIWjY

Hilbert's Hotel

If there are infinitely many rooms, the new guest will still get a room:



You can even show that infinitely many guests can arrive and still be accommodated at the hotel?!

Do not rely on your intuition when dealing with infinity! This is where **transversality** enters the picture.

This cannot happen in Finance!

Can it?

Successful business people;
Wikipedia, public domain.

Imagine you own a company that is run by the best managers we have today and had in history.

If money is available within the company, these managers will invest.

$\Longrightarrow$ Free cash flow will always be zero.

If the firm ends at $T < \infty$, the firm value is paid out and you are fabulously wealthy.

But what happens if the firm lives forever, $T \to \infty$? Let us simply apply our equation:

$$\widetilde{V}_t = \frac{0}{1+r_f} + \frac{0}{(1+r_f)^2} + \ldots + \frac{0}{(1+r_f)^t} + \ldots = 0$$

What a bizarre result! The firm is supposed to be worth nothing, even though over an infinite horizon it will grow without bound?

We will see in a moment what is wrong here.

Remark: “MM’s company”?

> real economic significance. An obvious example of such a case is the legendary company that is expected *never* to pay a dividend. If this were literally true then the value of the firm by (14) would be zero; by

Modigliani & Miller 1961, Dividend policy, growth, and the valuation of shares (Journal of Business).

The issue is already discussed in a footnote in Modigliani and Miller (1961).
Perhaps we should therefore call the example “M&M’s company” instead?

Limits—a technical detail

We are talking about limits here. With numbers the definition is obvious.

But cash flows, value etc. are random variables (mathematically: functions). How do we define a limit here?

We use the limit "almost everywhere"[1]

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{X}_T(\omega) = \tilde{X}(\omega)$$

This is to say: *random variables converge if it is for sure*[2] *that the variables converge in every state.*

[1] There are several other ways to define the limit—and they need not coincide!

[2] The probability (either P or Q) is 100%.

We need “transversality”.

The word *transverse* means lying across / crossing.

zusammen bestehen. Für die hierdurch definirte besondere Lage der Extremale zu der Curve $g = 0$ wollen wir die Bezeichnung transversal einführen. Haben überhaupt zwei von einem Punkte ausgehende Bogenelemente λ, μ nach den Coordinatenaxen die

Kneser introduced the term in a German textbook on calculus of variation.

In the literature, reference is made to a textbook from 1900, in which the term was probably used for the first time.

Transversality holds if for all t and for all states possibles ω[3]

$$\lim_{T\to\infty} \widetilde{V}_T \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{V}_T]}{(1+r_f)^{T-t}} \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{V}_T]}{(1+r_f)^{T-t}} = 0. \lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{V}_T(\omega)]}{(1+r_f)^{T-t}} = 0.$$

[3] The precise definition of "Q-almost everwhere" is much more complicated...

Q or the subjective probability (P)? 11

Q differs from the subjective probability (often P). Does it matter?

No. Technically, both probabilities have the same states that are impossible (have probability zero). This is shown in the fundamental theorem.

Why choose Q? 12

We used the expectation under the risk-neutral probability $\mathrm{E}_t^Q[\cdot]$ for our transversality formula, not $\mathrm{E}_t[\cdot]$. Why?

We wanted to rely on an assumption that does not rest on the additional (heroic) premise that the cost of capital is deterministic as well.

Main statement

From arbitrage:

$$\widetilde{V}_t = \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{CF}_{t+1} + \widetilde{V}_t]}{1 + r_f} \qquad \text{(fundamental theorem)}$$

If we want to use

$$\widetilde{V}_t = \sum_{t+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{CF}_s]}{(1 + r_f)^{s-t}} \qquad \text{(infinite valuation)}$$

it is sufficient and necessary that the condition

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\mathrm{E}_t^Q[\widetilde{V}_T]}{(1 + r_f)^{T-t}} = 0 \qquad \text{(transversal)}$$

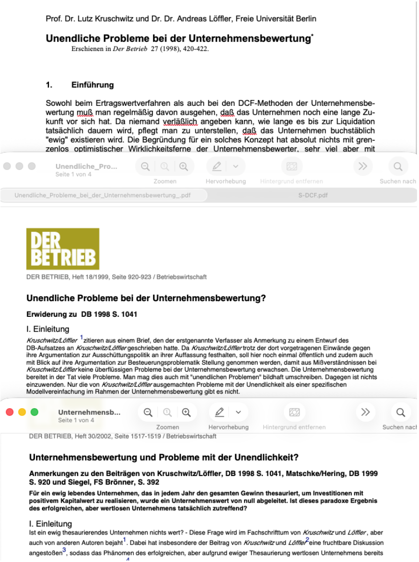
holds.

And what is wrong with Hilbert's company?
Transversality does not hold.

We cannot apply DCF to this case.[4]

[4] Technically, if we still do so, there is not just one but infinitely many "values" that satisfy the fundamental theorem.

A remark



Prof. Dr. Lutz Kruschwitz und Dr. Dr. Andreas Löffler, Freie Universität Berlin

Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung*

Erschienen in *Der Betrieb* 27 (1998), 420-422.

1. Einführung

Sowohl beim Ertragswertverfahren als auch bei den DCF-Methoden der Unternehmensbewertung muß man regelmäßig davon ausgehen, daß das Unternehmen noch eine lange Zukunft vor sich hat. Da niemand verläßlich angeben kann, wie lange es bis zur Liquidation tatsächlich dauern wird, pflegt man zu unterstellen, daß das Unternehmen buchstäblich "ewig" existieren wird. Die Begründung für ein solches Konzept hat absolut nichts mit grenzenlos optimistischer Wirklichkeitsferne der Unternehmensbewerter, sehr viel aber mit

Unendliche_Pro... Seite 1 von 4 Zoomen Hervorhebung Hintergrund entfernen Suchen nach

Unendliche_Probleme_bei_der_Unternehmensbewertung_.pdf S-DCF.pdf

DER BETRIEB

DER BETRIEB, Heft 18/1999, Seite 920-923 / Betriebswirtschaft

Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung?

Erwiderung zu DB 1998 S. 1041

I. Einleitung

Kruschwitz/Löffler [1] zitieren aus einem Brief, den der erstgenannte Verfasser als Anmerkung zu einem Entwurf des DB-Aufsatzes an *Kruschwitz/Löffler* geschrieben hatte. Da *Kruschwitz/Löffler* trotz der dort vorgetragenen Einwände gegen ihre Argumentation zur Ausschüttungspolitik an ihrer Auffassung festhalten, soll hier noch einmal öffentlich und zudem auch mit Blick auf ihre Argumentation zur Besteuerungsproblematik Stellung genommen werden, damit aus Mißverständnissen bei *Kruschwitz/Löffler* keine überflüssigen Probleme bei der Unternehmensbewertung erwachsen. Die Unternehmensbewertung bereitet in der Tat viele Probleme. Man mag dies auch mit "unendlichen Problemen" bildhaft umschreiben. Dagegen ist nichts einzuwenden. Nur die von *Kruschwitz/Löffler* ausgemachten Probleme mit der Unendlichkeit als einer spezifischen Modellvereinfachung im Rahmen der Unternehmensbewertung gibt es nicht.

Unternehmensb... Seite 1 von 4 Zoomen Hervorhebung Hintergrund entfernen Suchen nach

DER BETRIEB, Heft 30/2002, Seite 1517-1519 / Betriebswirtschaft

Unternehmensbewertung und Probleme mit der Unendlichkeit?

Anmerkungen zu den Beiträgen von Kruschwitz/Löffler, DB 1998 S. 1041, Matschke/Hering, DB 1999 S. 920 und Siegel, FS Brönner, S. 392

Für ein ewig lebendes Unternehmen, das in jedem Jahr den gesamten Gewinn thesauriert, um Investitionen mit positivem Kapitalwert zu realisieren, wurde ein Unternehmenswert von null abgeleitet. Ist dieses paradoxe Ergebnis des erfolgreichen, aber wertlosen Unternehmens tatsächlich zutreffend?

I. Einleitung

Ist ein ewig thesaurierendes Unternehmen nichts wert? - Diese Frage wird im Fachschrifttum von *Kruschwitz* und *Löffler*, aber auch von anderen Autoren bejaht[1]. Dabei hat insbesondere der Beitrag von *Kruschwitz* und *Löffler*[2] eine fruchtbare Diskussion angestoßen[3], sodass das Phänomen des erfolgreichen, aber aufgrund ewiger Thesaurierung wertlosen Unternehmens bereits

A lively—and at times emotional—debate unfolded years ago in Germany over this question.

If one wants to value infinitely lived firms, one must ensure that the values obtained from the fundamental theorem also satisfy the transversality condition.

Applying the infinite-horizon valuation formula implicitly assumes that the transversality condition holds.