Willkommen zum Workshop 2004 „Unternehmensbewertung“ in Hannover

Unternehmensbewertung ist und bleibt ein spannendes Thema. Nun schon zum vierten Mal treffen wir uns in Hannover, um aktuelle Probleme zu besprechen. Es zeigt sich sowohl bei den Teilnehmern wie auch den Themen eine starke Kontinuität, die es fortzusetzen gilt.

Wie auch in den Vorjahren danken wir der *Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät* der Universität Hannover für die Bereitstellung der Räumlichkeiten. Durch eine sehr großzügige Spende des *Vereins zur Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e. V.* konnten wir ein weiteres Mal vielen Promovenden Reisekostenzuschüsse gewähren und so die Anzahl der Teilnehmer erfreulich hoch halten. Frauke Gehrmann-Schröder, Julia Titowa und Peter Kalnbach haben für ein Umfeld gesorgt, in dem Konferenzen richtig Spaß machen.

Ich wünsche allen Teilnehmern einen spannenden Workshop in Hannover.

12. Juni 2004 Andreas Löffler

Teilnehmerverzeichnis

Ballwieser,Prof.	Wolfgang	München	ballwieser@bwl.uni-muenchen.de
Bamberg, Prof.	Günter	Augsburg	guenter.bamberg@wiwi.uni-augsburg.de
Blecher	Christian	Bielefeld	cblecher@wiwi-uni-bielefeld.de
Bolik	Yanqiong	Hannover	yt@wacc.de
Borgmann, Dr.	Michael	PwC, Hannover	michael.borgmann@de.pwc.com
Braun	Inga	Frankfurt	ibraun@wiwi.uni-frankfurt.de
Carlsen	Christina	Hamburg	carlsen@econ.uni-hamburg.de
Casey,Dr.	Christopher	Wien	christopher.casey@wu.edu
Essler	Wolfgang	München	Wolfgang.essler@orcf.de
Gläser	Inka	Hannover	is@wacc.de
Guntermann	Dirk	Hannover	Dirk.guntermann@stud.uni-hannover.de
Häußler	Matthias	Karlsruhe	Matthias.haeussler@wiwi.uni-karlsruhe.de
Hofmayer	Torben	Hannover	t.hofmayer@gmx.de
Husmann, Dr.	Sven	Frankfurt/Oder	husmann@euv-frankfurt-o.de
Jonas, Dr.	Martin	Warth-Klein,Bonn	m.jonas@warth-klein.com
Kalnbach	Peter	Hannover	peter.kalnbach@gmx.de
Kippes	Stefanie	Regensburg	stefanie.kippes@wiwi.uni-regensburg.de
Kluge	Markus	Reynold Luchterhand, Frankfurt	mk@reynolds-luchterhand.com
Krotter	Simon	Regensburg	simon,krotter@wiwi.uni-regensburg.de
Kruck	Alexander	Acxit,Frankfurt	alexander@kruck.biz
Kruschwitz, Prof.	Lutz	Berlin	ls-kruschwitz@wiwiss.fu-berlin.de
Laitenberger, Dr.	Jörg	Hannover	jl@wacc.de
Lobe	Sebastian	Regensburg	sebastian.lobe@wiwi.uni-regensburg.de
Lodowicks	Arnd	Berlin	arnd@lodowicks.com
Löffler, Prof.	Andreas	Hannover	al@wacc.de
Obermeier, Dr.	Robert	Regensburg	robert.obermaier@wiw.uni-regensburg.de
Rapp	Marc Steffen	Leipzig	rapp@finance.hhl.de
Rausch	Benjamin	Frankfurt	brausch@wiwi.uni-frankfurt.de
Rudolf	Marcus	Valendar	Markus.Rudolf@whu.edu
Schlösser	Rico	Osnabrück	rschloes@nts6.oec.uni-osnabrueck.de
Scholze	Andreas	Bielefeld	ascholze@wiwi.uni-bielefeld.de
Schöntag	Jürgen	Regensburg	Juergen.Schoentag@wiwi.uni-regensburg.de
Schüler, Dr.	Andreas	München	andreas.schueler@wiwi.uni-regensburg.de
Seidenschwarz	Holger	Regensburg	holger.seidenschwarz@wiwi.uni-regensburg.de
Stehle, Prof.	Richard	Humboldt, Berlin	stehle@wiwi.hu-berlin.de
Teichmann	Dennis	Hannover	Dennisteichmann@aol.com
Tschöpel, Dr.	Andreas	PwC, Berlin	andreas.tschoepel@de.pwc.com
Wallmeier, Prof.	Martin	Fribourg	martin.wallmeier@unifr.ch
Werner	Jan-Robert	KPMG, Frankfurt	jrwerner@gmx.de
Wiese	Jörg	München	Wiese@bwl.uni-muenchen.de
Zombori	Beata	Dresdner Bank Hameln	beata.zombori@dresdner-bank.com

Die Vorträge

J. Laitenberger (Hannover): Bei mehrperiodigen Projekten ist es üblich, die erwarteten Zahlungen mit geeigneten Kapitalkosten zu diskontieren. Jörg Laitenberger untersucht, wann als Kapitalkosten die erwarteten einperiodigen Renditen des Investitionsprojekts gewählt werden können. Er zeigt, dass im Allgemeinen dazu sehr restriktive Voraussetzungen notwendig sind.

G. Bamberg (Augsburg): In einem gemeinsamen Beitrag mit G. Dorfleitner und M. Krapp untersucht Günther Bamberg, wann ein risikobehaftetes mehrperiodiges Investitionsprojekt durch Auswertung des stochastischen Kapitalwerts per Einperioden-Risikonutzenfunktion bewertet werden darf. Er führt den Begriff der Kapitalmarktkompatibilität ein und zeigt auf, welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen diese Kapitalmarktkompatibilität gewährleisten.

M. Rudolf (WHU): Markus Rudolf beschäftigt sich in einer gemeinsamen Arbeit mit Manfred Krafft und Elisabeth Rudolf-Sipötz mit der Frage, wie Wachstumsunternehmen unter Rückgriff auf den Kundenstamm bewertet werden können. Insbesondere in Wachstumsunternehmen steigt die Anzahl der Kunden exponentiell an, um danach den Industriestandard anzustreben.

W. Ballwieser (München): Wolfgang Ballwieser beschäftigt sich mit der Frage, welchen Wert das Residualgewinnmodell für die Unternehmensbewertung aufweisen kann und soll.

C. Casey (Wien): Christopher Casey untersucht das Kruschwitz/Löffler-Paradoxon und zeigt auf, dass es unter gewissen Annahmen gar kein Paradox ist.

S. Lobe (Regensburg): Sebastian Lobe präsentiert ein Modell der Unternehmensbewertung, in dem persönliche Steuern berücksichtigt werden.

A. Löffler (Hannover): Andreas Löffler zeigt in einer gemeinsamen Arbeit mit Lutz Kruschwitz und Arnd Lodowicks, wie Insolvenzrisiken in die Unternehmensbewertung einbezogen werden können.

M.-S Rapp (Leipzig): Marc-Steffen Rapp behandelt in einer gemeinsamen Arbeit mit Bernhard Schwetzler die Frage, welche Wirkung die Einführung einer Steuer auf die Preise der Wertpapiere am Kapitalmarkt hat.

J. Wiese (München): Jörg Wiese stellt ein Kapitalmarktmodell (CAPM) unter Einbeziehung deutscher Steuern vor.

RENDITE UND KAPITALKOSTEN

Jörg Laitenberger*

Aktuelle Version: 21. April 2004

Überblick

Zur Bewertung von Investitionsprojekten mit mehrperiodigen Zahlungen können die erwarteten Zahlungen mit geeigneten Kapitalkosten diskontiert werden. Die Kapitalkosten werden in der Regel als die erwartete einperiodige Rendite der Investition bestimmt, wobei häufig auf Kapitalmarktmodelle wie das CAPM zurückgegriffen wird, die die erwartete Rendite als die Summe der risikolosen Rendite und einer Risikoprämie ermitteln. In dieser Arbeit wird gezeigt, dass die einperiodigen Renditen nur unter bestimmten Annahmen die geeigneten Kapitalkosten darstellen. Wenn zwischen den einperiodigen Renditen Autokorrelation auftritt, dann ist ein zusätzlicher Korrekturterm bei der Ermittlung der Kapitalkosten zu berücksichtigen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit wird analysiert, wie sich in Abhängigkeit der zeitlichen Auflösung der Unsicherheit die Kapitalkostenformeln ändern. Dabei stellt sich heraus, dass die Annahmen an die Risikoauflösung für die Zahlungen der Investition alleine keinerlei erklärende Kraft haben. Nur in Verbindung mit Annahmen an die Entwicklung der Zustandspreise können einfache und intuitive Relationen hergeleitet werden.

Keywords: Unternehmensbewertung, Kapitalkosten, Autokorrelierte Renditen
JEL–class.: J 31, G 46

*Lehrstuhl für Banken und Finanzierung der Universität Hannover, Königsworther Platz 1, 30167 Hannover, jl@wacc.de. Ich danke dem Verein zur Förderung der Zusammenarbeit zwischen Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V. für seine Unterstützung.

RENDITE UND KAPITALKOSTEN

1 Einleitung

Die moderne Finanzmarkttheorie auf arbitragefreien Märkten ermittelt den Wert eines Wertpapiers grundsätzlich als den Erwartungswert der als Zufallsvariablen aufgefassten zukünftigen Zahlungen der Wertpapiere multipliziert mit einem zustandsabhängigen Preisvektor. Bewertungsmodelle für derivative Finanzinstrumente (Optionen, Futures) und die Zinsstruktur haben in den letzten dreißig Jahren die Welt des Risikomanagements und den Wertpapierhandel revolutioniert. Zu ersteren gehören die Black-Scholes-Formel sowie das Binomialmodell von Cox, Ross und Rubinstein. Zu letzterem gehören u.a. die Bewertungsmodelle von Vasicek, von Cox, Ingersoll und Ross oder das Heath-Jarrow-Morton-Modell. Im Vergleich dazu existieren zur Bewertung von Aktien und allgemeiner von Unternehmen kaum Ergebnisse, die das Verfahren der zustandsabhängigen Preisvektoren nutzen. Dies liegt in erster Linie daran, dass aufgrund der ungleich höheren Zahl an Erklärungsvariablen für Aktienkursentwicklungen die Bestimmung eines geeigneten stochastischen Preisfunktionals für Aktienbewertungen wesentlich schwieriger ist und bisher empirisch nicht durchgeführt worden ist. Solange aber keine Theorie zur Bestimmung der relevanten Zustandspreise existiert, muss jede Untersuchung zur Bewertung von Investitionen, die diese verwendet, eine akademische Leerformel bleiben.

Die Literatur zur Bewertung von Aktien und allgemeiner von Unternehmen geht daher einen anderen Weg. Hier wird in der Regel vorgeschrieben, die erwarteten Zahlungen mit einem risikoadjustierten Diskontierungszinssatz abzuzinsen. Der risikoadjustierte Diskontierungszinssatz soll dabei die Opportunitätskosten einer entgangenen Rendite bei einer Anlage in eine vergleichbare alternative Investition wiedergeben. Dabei wird in der Regel vorgeschlagen die erwarteten einperiodigen Renditen der Investition als Kapitalkosten heranzuziehen. Diese werden in praktischen Anwendungen in der Regel mit Hilfe des CAPM als die Summe aus risikolosem Zins und einer Risikoprämie berechnet. Es ist allerdings äußerst unwahrscheinlich, dass sowohl der risikolose Zins als auch die Risikoprämie über die Dauer der Investition konstant bleiben. Brennan (1997) hat daher vorgeschlagen, variable Kapitalkosten für unterschiedliche Perioden der Investitionsdauer zu verwenden. Brennan leitet anhand eine ökonometrischen Modells für die erwarteten Renditen eine Zinsstrukturkurve für die Diskontierungsfaktoren her. Jüngst haben Ang und Liu (2002) diesen Ansatz erweitert, indem sie auch Schwankungen des Betas der Investition modellieren.

Der vorliegende Beitrag untersucht unter welchen Bedingungen an die gemeinsame stochastische Entwicklung sowohl der Zahlungen des Bewertungsobjektes als auch des stochastischen Marktpreisfunktionals die Methode der Kapitalkosten mit einer arbitragefreien Wertbestimmung kompatibel ist. Dabei stellt sich heraus, dass bei mehrperiodigen Investitionsprojekten die einperiodigen Renditen der Investition nur unter sehr eingeschränkten Bedingungen als Kapitalkosten geeignet sind, nämlich nur dann, wenn die Renditen des Projektes stochastisch unkorreliert sind. Dies wiederum wird aber in der Regel nur dann erreicht, wenn die bedingten Kovarianzen des Unternehmenswertes mit dem Marktpreisfunktional zu allen zukünftigen Zeitpunkten deterministisch sind. Wenn dies nicht der Fall ist, dann muss bei mehrperiodigen Investitionsprojekten zur Bestimmung der Kapitalkosten ein Korrekturfaktor zur erwarteten einperiodigen Rendite hinzutreten. Empirische Evidenz für autokorrelierte Renditen haben zumindest für den US–amerikanischen Kapitalmarkt unter anderem Fama und French (1988), Lo und Mackinlay (1988) und Poterba und Summers (1988) vorgelegt.

Im weiteren Verlauf wird analysiert, wie sich in Abhängigkeit der zeitlichen Auflösung der Unsicherheit die Kapitalkostenformeln ändern. Auch der in der Literatur diskutierte Extremfall eines sich schlagartig auflösenden Risikos führt nur dann dazu, dass die risikolose Rendite als Kapitalkosten herangezogen werden kann, wenn die bedingte erwartete Rendite der Zahlungen eine sichere Größe ist. Ansonsten können nämlich die zeitlichen Bewertungen der Zahlungen auch in den Zwischenperioden zu unsicheren Renditen führen, die eine Bewertung mit dem risikolosen Zinssatz verbieten. Allgemein gilt, dass die Annahmen an die Risikoauflösung für die Zahlungen der Investition alleine keinerlei erklärende Kraft haben. Nur in Verbindung mit Annahmen an die Entwicklung der Zustandspreise können einfache und intuitive Relationen hergestellt werden.

Der Aufsatz ist wie folgt aufgebaut. Der folgende Abschnitt stellt verschieden Bewertungsverfahren auf arbitragefreien Märkten vor. Während die Abschnitte 2.1 und 2.3 im Wesentlichen bekannte Relationen aus der Finanzmarkttheorie rekapitulieren, wird in Abschnitt 2.2 die Anwendung der Risikozuschlagstheorie untersucht und eine konsistente Definition für die Kapitalkosten geliefert. Im darauf folgenden Abschnitt werden Rendite und Kapitalkosten für in der Literatur diskutierte Formen der Risikoauflösung untersucht.

2 Bewertungsgleichungen

Dieser Aufsatz handelt von Unternehmenswerten im Rahmen der Kapitalmarkttheorie auf arbitragefreien Märkten. Das bedeutet, dass die Annahmen an einen reibungslosen Marktverkehr sowohl für die am Markt gehandelten Wertpapiere als auch für das zu bewertende Unternehmen gelten. Es werden demnach die folgenden Annahmen getroffen:

- Alle Wertpapiere und die Anteile an dem zu bewertenden Unternehmen sind zu jedem Zeitpunkt und in beliebiger Stückzahl handelbar. Insbesondere sind Leerverkäufe unbegrenzten Ausmaßes erlaubt und die Anteile sind beliebig teilbar.
- Es fallen keinerlei Transaktionskosten an. Kauf– und Verkaufspreise sind immer gleich.
- Die Zusammensetzung der Anteilseigner eines Unternehmens hat keinerlei Auswirkungen auf dessen zukünftige Erlöse.
- Es werden zu keinem Zeitpunkt Steuern gezahlt.

Mit diesen Annahmen wird ein Rahmen gesetzt, in dem sich die folgende Diskussion bewegen wird. Es wird damit nicht ausgeschlossen, dass viele Bewertungsverfahren in der Realität unter vollkommen anderen Bedingungen stattfinden. Es ist zum Beispiel allgemein bekannt und auch empirisch nachgewiesen, dass die Eigentümerstruktur eines Unternehmens durch Effekte moralischen Risikos einen nennenswerten Einfluss auf den Unternehmenswert haben kann. Dies dürfte insbesondere bei der in Deutschland vorherrschenden mittelständisch geprägten Unternehmerstrutur bei Bewertungsverfahren, in denen Eigentümer involviert sind, die Alleininhaber ihrer Unternehmen sind oder im Rahmen von Familienunternehmen wesentliche Anteile halten, durchaus von Bedeutung sein. Für diese Fälle sind andere Bewertungsverfahren heranzuziehen.

2.1 Zustandspreise

Die Kapitalmarkttheorie auf arbitragefreien Märkten erlaubt die Bewertung von Zahlungsströmen mit Hilfe von so genannten Zustandspreisen, die die Preise der Wertpapiere in einem linearen Verhältnis ihrer zukünftigen Zahlungen setzt. Der Rahmen für die Bewertung mit Zustandspreisen ist allgemeiner Lehrbuchstoff[1] soll deshalb hier nur sehr kurz abgehandelt werden.

[1] Man schlage zum Beispiel bei Wilhelm (1985) nach.

Man betrachte einen Kapitalmarkt mit Unsicherheit, die durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dargestellt wird. $s \in \Omega$ bezeichne einen primitiven Zustand der Ökonomie. $\mathcal{F}_t$ sei die Partition der Ereignisse, die zum Zeitpunkt t bekannt sind und die Folge der Partitionen $\mathcal{F}_{t=0,\ldots,T}$ sei eine Filtration des Zustandsraums.[2] Es werden diskrete Zeitperioden $t = 0, \ldots, T$ betrachtet, wobei $T = \infty$ möglich ist. Ein Wertpapier liefert einen unsicheren Zahlungsstrom von zukünftigen Dividenden d_t. Der Preis des Wertpapiers in t sei V_t. Sowohl d_t und V_t sind $\mathcal{F}_t$–messbare Zufallsvariablen. Die Annahme arbitragefreier Märkte garantiert die Existenz eines strikt positiven, messbaren Prozess π_t, so dass der Preis eines Wertpapiers sich wie folgt aus seinen Auszahlungen in der folgenden Periode ergibt:

$$V_t = \mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(d_{t+1} + V_{t+1})], \tag{1}$$

wobei $\mathrm{E}_t[\cdot]$ den bedingten Erwartungswert zum Zeitpunkt t bezeichnet. π_t ist der Zustandspreis oder der stochastische Diskontierungsfaktor.

Für ein Wertpapier mit mehrperiodigen Zahlungen führt die wiederholte Anwendung von Gleichung (1) zusammen mit harmlosen technischen Annahmen (der Prozess $\mathrm{E}_t[\pi_\tau d_\tau]$ sollte gegen Null konvergieren, wenn $\tau \to \infty$) zu einer Formel für den Wertpapierpreis als Summe aller zukünftigen abdiskontierten Dividenden:

$$V_t = \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{E}_t[\frac{\pi_\tau}{\pi_t} d_\tau]. \tag{2}$$

Der Preis eines einperiodigen risikolosen Wertpapiers, also eines Wertpapiers, das in der Periode $t+1$ eine sichere Zahlung in Höhe von eins und in allen anderen Perioden von Null liefert, ist gleich

$$\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}].$$

Die Rendite einer sicheren Investition von t nach $t+1$ sei der risikolose Zins i_{t+1}:

$$1 + i_{t+1} = \frac{1}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]}. \tag{3}$$

Die Rendite einer risikolosen Investition von t bis $t + \tau$ sei:

$$1 + i_{t,\tau} = \frac{1}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_\tau}{\pi_t}]}.$$

[2] Für weitere Details konsultiere man Standardlehrbücher der Wahrscheinlichkeitstheorie, z.B. Bamberg und Baur (2001).

Wird als Diskontierungsfaktor der riskolose Zins verwendet, wird aus dem Zustandspreis π_t ein Bewertungsindex:

$$q_{t,\tau} = \frac{\frac{\pi_\tau}{\pi_t}}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_\tau}{\pi_t}]}$$

und die Bewertungsformeln (1) und (2) ergeben sich zu

$$V_t = \frac{\mathrm{E}_t[q_{t,t+1}(d_{t+1} + V_{t+1})]}{1 + i_{t,t+1}}, \tag{4}$$

und

$$V_t = \sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{\mathrm{E}_t[q_{t,\tau} d_\tau]}{1 + i_{t,\tau}}. \tag{5}$$

Mit der Kovarianzidentität lassen sich diese Gleichungen auch wie folgt schreiben

$$V_t = \frac{\mathrm{E}_t[d_{t+1} + V_{t+1}] + \mathrm{Cov}_t[d_{t+1} + V_{t+1}, q_{t,t+1}]}{1 + i_{t,t+1}}, \tag{6}$$

bzw.

$$V_t = \sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{\mathrm{E}_t[d_\tau] + \mathrm{Cov}_t[d_\tau, q_{t,\tau}]}{1 + i_{t,\tau}}, \tag{7}$$

da $\mathrm{E}_t[q_{t,t+\tau}] = 1$.

Auf einem arbitragefreien Finanzmarkt kann also jedes Wertpapier und demnach auch jedes Unternehmen bewertet werden, wenn ausreichend Kenntnisse über die stochastischen Verteilungen der zukünftigen Dividenden als auch der stochastischen Diskontierungsfaktoren vorhanden sind. Gleichung (7) zeigt, dass nicht die vollständige Verteilungen sondern nur deren Erwartungswerte sowie die Kovarianzen mit dem Bewertungsindex und die Zinsstrukturkurve bekannt sein müssen, was allerdings immer noch eine ziemliche Menge an Informationen ist.

2.2 Die Risikozuschlagsmethode

Die traditionelle Unternehmensbewertunsliteratur kennt zwei Methoden der Unternehmensbewertung: die Sicherheitsäquivalentmethode und die Risikozuschlagsmethode. Erstere soll hier nicht weiter betrachtet werden. Die Risikozuschlagsmethode, die auch die in der Praxis meist verwendete Methode ist, sieht vor, dass die erwarteten zukünftigen Zahlungen mit einem adäquaten risikoangepassten Diskontierungszinssatz abgezinst werden. Der Diskontierungszinssatz wird dabei als die Kapitalkosten der Investition verstanden und entspricht der Rendite einer vergleichbaren Investition am Kapitalmarkt. Die zu bewertende Investition übernimmt damit automatisch die selbe Rendite an wie die herangezogenen Alternativanlage. Damit erhalten zumindest die Kapitalkosten einer einperiodigen Investition eine einfache ökonomische Interpretation als erwartete Rendite der Investition. Die Rendite von Periode $t-1$ zu t ist:

$$r_t := \frac{V_t + d_t}{V_{t-1}} - 1. \tag{8}$$

Wenn die zukünftigen Erträge unsicher sind, wird auch r_t eine unsichere Größe sein. Da

$$V_{t-1}(1 + r_t) = d_t + V_t,$$

ergibt sich

$$V_{t-1} = \frac{\mathrm{E}_{t-1}[d_t + V_t]}{1 + \mathrm{E}_{t-1}[r_t]}.$$

Also ist $\frac{1}{1+\mathrm{E}_{t-1}[r_t]}$ der Diskontierungsfaktor einer einperiodischen Investition. Dies ist auch das gängige Verfahren, nach dem sowohl in der Praxis als auch bei empirischen Untersuchungen zu Aktienrenditen die Kapitalkosten bestimmt werden.

Bei Investitionsprojekten mit Auszahlungen in mehreren zukünftigen Perioden kann dieses Ergebnis auf zweierlei Arten verallgemeinert werden. Einmal ist es möglich die Zahlungen in jeder einzelnen Periode mit den ihren eigenen Kapitalkosten zu bewerten.[3] Die Bestimmung dieser Kapitalkosten ist aber nahezu unmöglich, da zur Bestimmung der Rendite einer einzelnen Zahlung deren Wertbeitrag zum Gesamtunternehmenswert bekannt sein müsste. Empirisch zu messen ist aber nur die Rendite der gesamten Investition, die offensichtlich ein gewichteter Durchschnitt der Renditen aller zukünftigen Cashflows ist.[4] Alternativ werden die einperiodigen Renditen der gesamten Investition wiederholt angewendet. Dies führt allerdings nur dann zu einem korrekten Unternehmenswert, wenn die einperiodigen Renditen untereinander unkorreliert sind. Sonst müssen gewissen Korrekturterme in den Kapitalkosten berücksichtigt werden. Da

$$V_{t-1}(1 + \mathrm{E}_{t-1}[r_t]) = \mathrm{E}_{t-1}[d_t + V_t]$$

[3]So zum Beispiel bei Brennan (1997) und Ang und Liu (2002).
[4]Vergleiche Rapp (2003).

hat man bei einer Investition über zwei Perioden

$$\mathrm{E}_{t-2}[V_{t-1}] = \frac{\mathrm{E}_{t-2}[d_t + V_t]}{1 + \mathrm{E}_{t-2}[r_t] + \frac{\mathrm{Cov}_{t-2}[V_{t-1}, \mathrm{E}_{t-1}[r_t]]}{\mathrm{E}_{t-2}[V_{t-1}]}}$$

und

$$V_{t-2} = \frac{\mathrm{E}_{t-2}[d_{t-1}]}{1 + \mathrm{E}_{t-2}[r_{t-1}]} \quad + \frac{\mathrm{E}_{t-2}[d_t + V_t]}{(1 + \mathrm{E}_{t-2}[r_{t-1}])\left(1 + \mathrm{E}_{t-2}[r_t] + \frac{\mathrm{Cov}_{t-2}[V_{t-1}, \mathrm{E}_{t-1}[r_t]]}{\mathrm{E}_{t-2}[V_{t-1}]}\right)}.$$

Daher ist $\frac{1}{1+\mathrm{E}_{t-2}[r_t]}$ nur dann der geeignete Diskontierungsfaktor zur Bewertung der Erträge in der zweiten Periode, wenn

$$\mathrm{Cov}_{t-2}[V_{t-1}, \mathrm{E}_{t-1}[r_t]] = 0, \tag{9}$$

was man im Allgemeinen nicht erwarten werden kann. In ökonomischen Anwendungen wird man Bedingung (9) wahrscheinlich in der Regel schärfer treffen und gleich deterministische erwartete Renditen $\mathrm{E}_{t-1}[r_t]$ unterstellen.[5]

Werden die obigen Berechnungen auf weitere Perioden ausgedehnt, erhält man

$$V_t = \sum_{\tau=t+1}^{T} \frac{\mathrm{E}_t[d_\tau]}{\prod_{j=1}^{\tau-t}(1 + k_{t,t+j})} \tag{10}$$

mit den Kapitalkosten

$$k_{t,t+j} = \mathrm{E}_t[r_{t+j}] + \frac{\mathrm{Cov}_t[V_{t+j-1}, \mathrm{E}_{t+j-1}[r_{t+j}]]}{\mathrm{E}_t[V_{t+j-1}]}. \tag{11}$$

Dies ist die Standard–Lehrbuchformel zur Bewertung von unsicheren Investitionen mit zeitabhängigen Kapitalkosten. Zur Bestimmung eines Unternehmenswertes werden in diesem Rahmen Informationen über die erwarteten zukünftigen Zahlungsüberschüsse und die erwarteten zukünftigen einperiodigen Renditen sowie die Korrelation der einperiodigen Renditen mit den zukünftigen Unternehmenswerten benötigt. Da die zukünftigen Unternehmenswerte sich im wesentlichen aus den Renditen ergeben, können letztere als Autokorrelation der Renditen untereinander verstanden werden. Unter Verwendung der Kursgewinne $g_{t,t+j}$ von Periode t bis Periode $t+1$, wobei

$$V_{t+j} = V_t(1 + g_{t,t+j}),$$

kann der Quotient in (11) wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{Cov}_t[g_{t,t+j-1}, \mathrm{E}_{t+j-1}[r_{t+j}]]}{1 + \mathrm{E}_t[g_{t,t+j-1}]}.$$

[5] So zum Beispiel Laitenberger und Löffler (2002).

2.3 Rendite und Zustandspreise

Fügt man die Bewertungsgleichungen aus Abschnitt 2.1 in die Definition der Rendite (8) ein, so erhält für den Unternehmenswert in t die Gleichung:

$$V_t = \mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(V_{t+1}+d_{t+1})] = \mathrm{Cov}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}, V_{t+1}+d_{t+1}]+\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]\mathrm{E}_t[V_{t+1}+d_{t+1}],$$

bzw. für die Rendite r_{t+1}:

$$1 = \mathrm{Cov}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}, r_{t+1}] + \mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]\mathrm{E}_t[1 + r_{t+1}].$$

Umgeformt und nach $\mathrm{E}_t[r_{t+1}]$ aufgelöst, erhält man unter Ausnutzung der Beziehung (3):

$$1 + \mathrm{E}_t[r_{t+1}] = (1 - \mathrm{Cov}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}, r_{t+1}])(1 + i_{t+1}). \tag{12}$$

Wird der Quotient $\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}$ als Auszahlung eines Wertpapiers zum Zeitpunkt $t + 1$ betrachtet, so kann auch für dieses Wertpapier eine Rendite $r_{\pi,t+1}$ berechnet werden:

$$1 + r_{\pi,t+1} = \frac{\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]}.$$

Damit schreibt sich Gleichung (12) wie folgt:

$$1 + \mathrm{E}_t[r_{t+1}] = (1 - \mathrm{Cov}_t[r_{\pi,t+1}, r_{t+1}]\mathrm{E}_t[(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t})^2])(1 + i_{t+1}).$$

Unter Ausnutzung der Beziehung

$$\mathrm{Var}_t[r_{\pi,t+1}] = \frac{\mathrm{E}_t[(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t})^2]}{\mathrm{E}_t[(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t})^2]^2} - \frac{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]^2}{\mathrm{E}_t[(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t})^2]^2},$$

kann die letzte Gleichung schließlich zu der bekannten Kapitalmarktgleichung

$$\mathrm{E}_t[r_{t+1}] = i_{t+1} + \frac{\mathrm{E}_t[r_{\pi,t+1}] - i_{t+1}}{\mathrm{Var}_t[r_{\pi,t+1}]}\mathrm{Cov}_t[r_{t+1}, r_{\pi,t+1}] \tag{13}$$

umgeformt werden. Die letzte Gleichung drückt die erwartete Rendite der Investition als Regressionsgleichung der Rendite mit der Rendite des Wertpapiers $\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}$ aus. $r_{\pi,t+1}$ nimmt in diesem Rahmen die Rolle des Indexes ein, die zum Beispiel beim CAPM durch die Rendite des Marktportfolios eingenommen wird.

Wie bei Fama (1977) können nun Bedingungen an die einzelnen Bestandteile der Kapitalkostenformel (13) hergeleitet werden, die eine Autokorrelation der Renditen verhindern und damit eine bedenkenlose Verwendung der erwarteten Renditen als Kapitalkosten ermöglichen. Ersetzt man bei Fama konsequent das Marktportfolio durch das Wertpapier $\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}$, dann garantieren ein sicherer kurzfristiger Zinssatz i_{t+1}, ein sicherer Preis des Risikos des Bewertungsportfolios $\frac{\mathrm{E}_t[r_{\pi,t+1}]-i_{t+1}}{\mathrm{Var}_t[r_{\pi,t+1}]}$ sowie eine Korrelation $\mathrm{Cov}_t[r_{t+1}, r_{\pi,t+1}]$, die zu allen früheren Zeitpunkten $\tau < t$ bereits mit Sicherheit bekannt ist, eine sichere erwartete Rendite $\mathrm{E}_t[r_{t+1}]$, wobei 'sicher' in diesem Kontext immer bedeutet, dass die entsprechenden $\mathcal{F}_t$–messbaren Zufallsvariablen sogar $\mathcal{F}_0$–messbar sind, also zum Beispiel $\mathrm{E}_t[r_{t+1}] = \mathrm{E}[r_{t+1}]$.

3 Risikoauflösung und Kapitalkosten

Im verbleibenden Teil dieses Aufsatzes sollen für bestimmte Beispiele von Dividenden– und Zustandspreisprozesse die sich ergebenden Kapitalkosten untersucht werden und insbesondere auf ihre Autokorrelation getestet werden. In diesem Rahmen wurde in den letzten Jahren häufig von der Auflösung der Unsicherheit gesprochen, wobei insbesondere die Fälle einer schlagartigen und einer gleichmäßigen Auflösung behandelt wurden.[6] Grundsätzlich kann unter der Auflösung der Unsicherheit die Entwicklung der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$ verstanden werden. Je feiner die Partition $\mathcal{F}_t$ den Zustandsraum Ω abdeckt, desto genauer ist das Wissen der Marktteilnehmer bezüglich der möglichen zukünftigen Entwicklungen. Für die Wertfindung von Relevanz sind allerdings nur solche Veränderungen, die einen Einfluss auf die Verteilung der zukünftigen Dividenden als auch auf die Verteilung der Zustandspreise haben. Von einer Veränderung von Periode t zu $t+1$ einer Verteilung einer Zufallsvariable x_τ mit $\tau \geq t+1$ kann gesprochen werden, wenn die bedingte Verteilung der Zufallsvariable x_τ $F_x(s|\mathcal{F}_{t+1})$, gegeben die Entwicklung bis zum Zeitpunkt $t+1$, sich von der bedingten Verteilung $F_x(s|\mathcal{F}_t)$, gegeben die Entwicklung bis t, unterscheidet.

Eine schlagartige Auflösung des Risikos im Zeitpunkt τ einer Zufallsvariable x_τ ist dann gegeben, wenn die bedingten Verteilungen $F_x(s|\mathcal{F}_t)$ bis zum Zeitpunkt $t < \tau$ sich nicht von der absoluten Verteilung $F_x(s) = F_x(s|\mathcal{F}_0)$ unterscheiden. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass bis zum Zeitpunkt $\tau - 1$ nichts über die Verteilung von x_τ dazugelernt wird. Erst in Periode τ wird die gesamte Unsicherheit aufgelöst.

[6] Ballwieser (1993), Schwetzler (2000), Wilhelm (2003).

Schwieriger ist die Abgrenzung dessen, was unter einer gleichmäßigen Auflösung des Risikos zu verstehen ist. Man betrachte dazu die Zufallsvariablen

$$\rho_{t+1} := \frac{\mathrm{E}_{t+1}[x_\tau]}{\mathrm{E}_t[x_\tau]} - 1. \tag{14}$$

Diese sind per Definition $\mathcal{F}_{t+1}$–messbar. Es gilt offensichtlich:

$$d_T = \mathrm{E}[d_T](1+\rho_1)(1+\rho_2)\cdots(1+\rho_T). \tag{15}$$

Wilhelm (2003) schlägt vor, von gleichmäßiger Auflösung des Risikos zu sprechen, wenn die Varianz aller ρ_t gleich ist. In diesem Aufsatz wird die gleichmäßige Auflösung der Unsicherheit noch etwas strenger gefasst, indem gefordert wird, dass alle ρ_t unabhängig und identisch verteilt sein sollen. Offensichtlich weist eine Zufallsvariable, die nach diesem Kriterium eine gleichmäßige Auflösung der Unsicherheit aufweist, dies auch nach dem Wilhelmschen Kriterium. Umgekehrt gilt dies nicht, da Verteilungen mit gleicher Varianz vollkommen unterschiedliche Formen aufweisen können.[7]

Im Folgenden soll untersucht werden, welche Auswirkungen auf die Kapitalkostenformeln unterschiedliche Szenarien der Risikoauflösung sowohl der Dividenden als auch der Zustandspreise haben können. Dabei werden nur Investitionen mit einmaligen Zahlungen betrachtet. Der Fall mehrmaliger Zahlungen bringt keine zusätzlichen Erkenntnisse mit sich. Die Analyse würde dadurch nur erschwert, indem die Zahlungen bzw. deren Erwartungswerte in früheren Perioden miteinander korrelieren können.[8]

Als erstes wird der Fall einer schlagartigen Auflösung der Unsicherheit untersucht. Man betrachte den Extremfall einer sicheren Zahlung d_T in Periode T. Da keine Unsicherheit im Spiel ist, kann hier sowohl von einer schlagartigen als auch einer gleichmäßigen Auflösung gesprochen werden. Über T Perioden hat d_T eine sichere Rendite von

$$r_{0,T} = \frac{d_T}{\mathrm{E}[\pi_T d_T]} - 1 = i_{0,T}.$$

Über eine einzelne Periode ergibt sich jedoch die Rendite

$$1 + r_{t+1} = \frac{V_{t+1}}{V_t} = \frac{\mathrm{E}_{t+1}[\pi_T d_T]}{\pi_{t+1}} \frac{\pi_t}{\mathrm{E}_t[\pi_T d_T]} = \frac{1 + i_{t,T}}{1 + i_{t+1,T}},$$

[7] Als ein Beispiel seien die Standardnormalverteilung und die diskrete Verteilung, bei der mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte -1 und 1 angenommen werden, genannt. Beide Verteilungen haben eine Varianz von eins.

[8] Wer bei den folgenden Ausführungen trotzdem unbedingt mehrmalige Zahlungen unterstellen will, kann sich vorstellen, es gelte für alle d_t, dass $d_t = \alpha_t V_t$ mit einem skalaren $\alpha_t \in \mathbb{R}$.

die in t einen Erwartungswert von

$$\mathrm{E}_t[\frac{1+i_{t,T}}{1+i_{t+1,T}}] = 1 + i_{t,t+1}$$

aufweist. Zum Zeitpunkt $t = 0$, in dem die Bewertung durchgeführt wird, ist dies eine unsichere Rendite, wenn die kurzfristigen Zinssätze $i_{t,t+1}$ nicht deterministisch sind. Dies zeigt, dass selbst der allertrivialste Fall einer einzelnen sicheren Zahlung sich nicht ohne weiteres mit ihren erwarteten einperiodigen Renditen diskontieren lässt. Nur wenn die kurzfristigen Zinssätze untereinander unkorreliert sind, ist eine Anwendung des Kapitalkostenkalküls möglich.

Im Allgemeinen gilt für die Rendite von Periode t nach Periode $t+1$ einer unsicheren Zahlung d_T in Periode T:

$$1 + r_{t+1} = \frac{\mathrm{E}_{t+1}[\frac{\pi_T}{\pi_{t+1}} d_T]}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_T}{\pi_t} d_T]}.$$

Mit der Schreibweise für die Auflösung der Unsicherheit aus Gleichung (14) kann man die Erwartungswerte wie folgt schreiben:

$$\mathrm{E}_t[\frac{\pi_T}{\pi_t} d_T] = \mathrm{E}[d_T](1+\rho_1)\cdots(1+\rho_t)\mathrm{E}_t[\frac{\pi_T}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})\cdots(1+\rho_T)].$$

Durch Erweiterung mit $\frac{\pi_{t+1}}{\pi_{t+2}}$, usw... erhält man dadurch für die Rendite den folgenden Ausdruck:

$$1 + r_{t+1} = (1+\rho_{t+1}) \frac{\mathrm{E}_{t+1}[\left(\frac{\pi_{t+2}}{\pi_{t+1}}(1+\rho_{t+2})\right)\cdots\left(\frac{\pi_T}{\pi_{T-1}}(1+\rho_T)\right)]}{\mathrm{E}_t[\left(\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})\right)\cdots\left(\frac{\pi_T}{\pi_{T-1}}(1+\rho_T)\right)]}.$$

Unter der Voraussetzung, dass $\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})]$ für alle t deterministisch ist,[9] kann dies so aufgelöst werden, dass

$$1 + r_{t+1} = (1+\rho_{t+1}) \frac{1}{\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})]}. \tag{16}$$

Der Diskontierungsfaktor $\frac{1}{1+k_{t+1}}$ ergibt sich als

$$\frac{1}{1+k_{t+1}} = \frac{1}{1+\mathrm{E}_t[r_{t+1}]} = \mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})].$$

[9] Streng genommen genügt sogar die Bedingung, dass die $\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})]$ paarweise unabhängig sind.

Damit wurde gezeigt, dass unter den Voraussetzungen, die eine Anwendung des Kapitalkostenkalküls erst möglich machen, die Stochastik der einperiodigen Renditen einer Investition identisch ist mit der Stochastik, mit der sich die Unsicherheit in der gleichen Periode auflöst. Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der beiden Zufallsvariablen $(1 + r_t)$ und $(1 + \rho_t)$ unterscheiden sich nur um einen skalaren Faktor, der wiederum von der Auflösung der Unsicherheit und dem Bewertungsfaktor der besagten Periode abhängt. Wenn die Kapitalkosten gleich der erwarteten Rendite sind, so ergeben sie sich als der Kehrwert des bewerteten Informationszuflusses.

Um der Bedingung

$$\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1 + \rho_{t+1})] \quad \text{deterministisch} \tag{17}$$

einen ökonomischen Sinn zu geben, setzt man wie in Abschnitt 2.3

$$\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t} = \frac{1 + r_{\pi,t+1}}{1 + i_{t+1}} \left(\frac{i_{t+1} - \mathrm{E}_t[r_{\pi,t+1}]}{\mathrm{Var}_t[r_{\pi,t+1}]} \right)$$

ein, mit der Rendite $r_{\pi,t+1}$ des Bewertungsindexes von t nach $t + 1$:

$$\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1 + \rho_{t+1})] = \frac{1}{1 + i_{t+1}} \left(\frac{i_{t+1} - \mathrm{E}_t[r_{\pi,t+1}]}{\mathrm{Var}_t[r_{\pi,t+1}]} \right) \mathrm{E}_t[(1 + r_{\pi,t+1})(1 + \rho_{t+1})].$$

Damit wird deutlich, dass Annahmen an die Auflösung der Unsicherheit für die zu bewertende Zahlung alleine nicht ausreichen, um eine Bewertung mit dem Kapitalkostenkonzept unter Verwendung der erwarteten Renditen zu gewährleisten. Nur wenn auch die kurzfristigen Zinsen, die erwarteten Renditen der Bewertungsportfolios, deren Varianz und die Kovarianz[10] mit dem Informationsprozess ρ_t von Anbeginn bekannte Größen sind, erhält man die gewünschten Ergebnisse.

Als Nächstes soll das bisher Erreichte auf den Fall einer unsicheren Zahlung d_T in T, deren Unsicherheit sich schlagartig auflöst, angewendet werden. Das bedeutet, dass in Perioden $t < T$ keine Auflösung der Unsicherheit stattfindet, oder anders ausgedrückt: $\rho_t = 0$. Die Bedingung (17) impliziert nun, dass $\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}]$ deterministisch ist, was gleichbedeutend ist mit deterministischen kurzfristigen Zinsen. In einer Periode $t < T$ erhält man mit

[10]Die Kovarianz taucht hier wieder wegen der Kovarianzidentität auf:

$$\mathrm{E}_{T-1}[(1 + r_{\pi,T})d_T] = \mathrm{Cov}_{T-1}[r_{\pi,T}, d_T] + \mathrm{E}_{T-1}[1 + r_{\pi,T}]\mathrm{E}_{T-1}[d_T].$$

Gleichung (16):

$$1 + r_t = \frac{1}{\mathrm{E}_{t-1}[\frac{\pi_t}{\pi_{t-1}}]} = 1 + i_t.$$

Der Fall einer gleichmäßigen Auflösung von Unsicherheit lässt sich mit Gleichung (16) ebenso elegant untersuchen. Da $\mathrm{E}_t[\frac{\pi_{t+1}}{\pi_t}(1+\rho_{t+1})]$ neben der Stochastik des Informationsprozesses vom risikolosen Zins und von der Rendite des Bewertungsportfolios abhängt, wird man auch bei einer gleichmäßigen Auflösung von Unsicherheit konstante Kapitalkosten nur dann erhalten, wenn auch der risikolose Zins, der Marktpreis des Risikos und die Kovarianz der Rendite des Bewertungsportfolios mit dem Informationsprozess konstante Größen sind. Mithin wird man dann in der Regel davon ausgehen können, dass auch die Renditen des Bewertungsindexes identisch und unabhängig verteilt sind.

4 Schluss

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Bewertung von Investitionen auf arbitragefreien Märkten konsistent mit dem Kapitalkostenkalkül durchgeführt werden kann, sofern die Kapitalkosten adäquat ermittelt werden. Die in der Praxis als Kapitalkosten in der Regel verwendeten erwarteten Renditen sind allerdings nur dann geeignet, wenn die einperiodigen Renditen unkorreliert sind. Ist dies nicht der Fall, so muss zu den erwarteten Renditen ein Korrekturterm hinzugefügt werden.

Für den Fall unkorrelierter Renditen kann in dieser Arbeit ein enger Zusammenhang der einperiodigen Renditen mit dem Prozess der Auflösung von Unsicherheit festgestellt werden. Dies steht im Gegensatz zu Ergebnissen von Wilhelm (2003), der für eine andere Definition der Unsicherheitsauflösung keine Zusammenhänge zwischen Informationsfluss und Kapitalkosten feststellen kann. Das liegt zum einen daran, dass Wilhelm additive Zuwächse der Information betrachtet, zum anderen an einer etwas ungeschickten Definition des Kapitalkostenkonzeptes bei Wilhelm. Mit der in dieser Arbeit verwendeten Definition der Kapitalkosten und unter Bedingungen, die es erlauben die erwarteten Renditen der Investition als Kapitalkosten heranzuziehen, ergeben sich sehr einfache und intuitive Zusammenhänge zwischen dem Informationsprozess und den Renditen bzw. den Kapitalkosten.

Literatur

Ang, A. und Liu, J.: 2002, How to discount cashflows with time-varying expected returns. Discussion Paper, Columbia University.

Ballwieser, W.: 1993, Methoden der Unternehmensbewertung, *in* G. Gebhardt, W. Gerke and M. Steiner (Hrsg.), *Handbuch des Finanzmanagements*, 151–176.

Bamberg, G. und Baur, F.: 2001, *Statistik*, 11. Aufl., Oldenbourg, München, Wien.

Brennan, M.: 1997, The term structure of discount rates, *Financial Management* **26**, 81–90.

Fama, E. und French, K.: 1988, Permanent and temporary components of stock prices, *Journal of Political Economy* **96** 246–273.

Fama, E.: 1977, Risk–adjusted discount rates and capital budgeting under uncertainty, *Journal of Financial Economics* **5**, 3–24.

Laitenberger, J. und Löffler, A.: 2002, Capital budgeting in arbitrage–free markets. Discussion Paper, Universität Hannover.

Lo, A. und Mackinlay, A.: 1988, Stock market prices do not follow random walks: evidence from a simple specification test, *Review of Financial Studies*, **xx** 41–66.

Poterba, J. und Summers, L.: 1988, Mean reversion in stock prices, *Journal of Financial Economics* **22**, 27–59.

Rapp, M.–S.: 2003, Arbitragefreie Bewertung von Investitionsprojekten - Ein Brückenschlag zwischen No-Arbitrage-Theorie und DCF-Verfahren mittels stochastischer Diskontierungssätze. Diskussionspapier Handelshochschule Leipzig.

Schwetzler, B.: 2000, Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent– oder Risikozuschlagsmethode?, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung* **52**, 469–486.

Wilhelm, J.: 2003, Unternehmensbewertung – eine finanzmarkttheoretische Untersuchung. Passauer Diskussionspapiere.

Wilhelm, J.: 1985, *Arbitrage Theory*, Springer, Berlin et al.

ARBEITSPAPIERE
ZUR
MATHEMATISCHEN WIRTSCHAFTSFORSCHUNG

Kapitalmarktkompatible Unternehmensbewertung unter Unsicherheit

– Zur entscheidungstheoretischen Fundierung der Risikoanalyse –

G. Bamberg, G. Dorfleitner, M. Krapp

Heft 185 / 2003

Institut für Statistik und
Mathematische Wirtschaftstheorie
Universität Augsburg

Universitätsstraße 16
D-86159 Augsburg
Tel.: +49 821 598 4151
Fax: +49 821 598 4227

guenter.bamberg@wiwi.uni-augsburg.de

Kapitalmarktkompatible Unternehmensbewertung unter Unsicherheit
– Zur entscheidungstheoretischen Fundierung der Risikoanalyse –

Überblick

- Der Beitrag zeigt auf, unter welchen Bedingungen ein risikobehaftetes mehrperiodiges Investitionsprojekt durch Auswertung des (stochastischen) Kapitalwerts per Einperioden-Risikonutzenfunktion bewertet werden darf beziehungsweise muss.
- Besitzt der Bewerter Zugang zu einem perfekten Geldmarkt, so kann er den zu bewertenden stochastischen Zahlungsstrom präferenzerhaltend transformieren. Eine Risikonutzenfunktion, die nicht sensitiv auf derartige Transformationen reagiert, bezeichnen wir als kapitalmarktkompatibel. Es wird geklärt, welche multiattributiven Risikonutzenfunktionen kapitalmarktkompatibel sind.
- Im Kontext kapitalmarktkompatibler Nutzenmessung erweist sich das Sicherheitsäquivalent des stochastischen Kapitalwerts als eine zur Unternehmensbewertung geeignete Größe. Dessen Berechnung erfordert i.A. Faltungen. In Spezialfällen ist jedoch die Herleitung einfacher expliziter Bewertungsgleichungen möglich.
- Ferner wird demonstriert, dass unterschiedliche multiattributive Risikoaversionsbegriffe im Falle der Kapitalmarktkompatibilität zusammenfallen müssen.

A. Motivation

Im Rahmen der zwischen Kürsten und Schwetzler entbrannten Diskussion um die entscheidungstheoretische Fundierung der so genannten Sicherheitsäquivalentmethode[1] resümiert Kürsten (2002), S. 142: „So würde eine theoretisch interessante und zugleich eben praxisrelevante Frage etwa wie folgt lauten: Können *andere* [Hervorhebung im Original] amalgamierende Größen an die Stelle einer Summe diskontierter Sicherheitsäquivalente treten, die unter vertretbaren Prämissen an die Präferenzordnung des bewertenden Wirtschaftssubjekts entscheidungstheoretisch fundiert und trotzdem geeignet sind, individuell «gegriffene» Risikozuschläge auf ihre Plausibilität hin zu prüfen?“ Unseres Erachtens ist diese Frage mit „ja“ zu beantworten. Wir werden in Abschnitt C dieser Arbeit unter der Prämisse eines Kapitalmarkts, von dem lediglich die Existenz eines risikolosen Zinssatzes gefordert wird, ein Bewertungsfunktional herleiten, das sich aus elementaren Konsistenzüberlegungen ergibt, wenn man die durch den Kapitalmarkt gegebenen Transformationsmöglichkeiten adäquat berücksichtigt. Es handelt sich dabei um das Sicherheitsäquivalent des stochastischen Kapitalwerts, das Kürsten (2002), S. 142, als die „Bewertungsziffer der Risikoanalyse“ bezeichnet, jedoch erwähnt, dass es dieser an theoretischer Legitimation mangele. Ähnlich äußerten sich auch bereits Haley/Schall (1979), S. 193 f. Ein Anliegen dieses Beitrags ist, dieses Theoriedefizit zu beseitigen, indem er das bislang fehlende entscheidungstheoretische Fundament der Risikoanalyse liefert.

Mit diesem Bewertungskonzept ist die von Kürsten (2002), S. 137 ff., als „entscheidungstheoretische Schimäre“ gebrandmarkte Sicherheitsäquivalentmethode in der Tat nur unter der – Sicherheitsäquivalente nutzlos machenden – Annahme risikoneutraler Bewerter vereinbar. Unser Bewertungsfunktional dient aber keineswegs nur der Reproduktion dieses bereits bekannten Vorbehalts. Vielmehr besitzt es eine normative Dimension, als es die Frage nach einem fundierten Substitut für die Sicherheitsäquivalentmethode positiv beantwortet.

Der Rest der Arbeit ist wie folgt gegliedert: Gegenstand von Abschnitt B ist die Bewertung eines risikobehafteten Zahlungsstroms mithilfe multiattributiver Nutzenfunktionen. Dazu werden zunächst verschiedene multivariate Risikoaversionsbegriffe diskutiert und sodann das für die Unternehmensbewertung relevante Sicherheitsäquivalent erörtert. Darauf aufbauend wird in Abschnitt C das Problem der Unternehmensbewertung bei Vorhandensein eines Kapitalmarkts im Sinne eines perfekten Geldmarkts untersucht. Hierbei nehmen wir aus didaktischen Gründen eine flache Zinsstruktur an, zeigen aber auch, wie das zentrale Resultat, die Herleitung der Risikoanalyse, geeignet auf eine beliebige Zinsstruktur zu verallgemeinern ist. Ferner enthält Abschnitt C einige Sätze, deren Beweise aus Gründen einer strafferen Darstellung in den Anhang ausgegliedert wurden. Mit einer ausführlichen Diskussion der Ergebnisse, in der auch eine denkbare praktische Umsetzung angesprochen wird, schließt die Arbeit.

B. Individualistische Unternehmensbewertung

Der im Zeitpunkt $t = 0$ zu bewertende Zahlungsstrom beinhalte die zu den äquidistanten Zeitpunkten $t = 0, 1, \ldots, T$ anfallenden Einzahlungsüberschüsse, welche als risikobehaftet interpretiert werden. Bezeichnet man mit X_t den im Zeitpunkt t anfallenden (stochastischen) Einzahlungsüberschuss, so lässt sich der zu bewertende Zahlungsstrom als $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ angeben. Folgt man einer rein individualistischen Sichtweise, so ist dieser Zahlungsstrom als unabänderlich anzusehen, da er zum Beispiel das nach Ausschöpfung aller Hedgingmöglichkeiten verbleibende „Restrisiko“ beschreibt.

Im Folgenden setzen wir voraus, dass die Präferenzordnung des Entscheidungsträgers durch eine *multiattributive von Neumann/Morgenstern-Nutzenfunktion* $u(x_0, \ldots, x_T)$ repräsentiert werden kann,[2] wobei x_t die Realisation der Zufallsvariablen X_t $(t = 0, \ldots, T)$ bezeichnet. Zusätzlich gehen wir von der üblichen Voraussetzung aus, dass u differenzierbar mit positiver erster Ableitung ist.

I. Multivariate Risikoaversions-Begriffe

Conditio sine qua non für den Einsatz multiattributiver Risikonutzenfunktionen ist die Auswahl der „richtigen“ Nutzenfunktion des Bewerters, nämlich derjenigen, die seine Risikopräferenzen korrekt repräsentiert.[3] Im Fall eindimensionaler Nutzenfunktionen $u(x)$ können diese zum Beispiel mithilfe des Arrow-Pratt-Maßes $-u''(x)/u'(x)$ erfasst werden. Interessieren hingegen multiattributive Nutzenfunktionen, so ist die Beurteilung der zu Grunde liegenden Risikoeinstellung schwieriger: Zum einen kann sich die Risikoeinstellung auf unterschiedliche Aspekte beziehen, beispielsweise auf den Zahlungsstrom als Ganzes oder aber auch auf jeden einzelnen Cashflow. Zum anderen werden in der Literatur verschiedene Sichtweisen vertreten, wie Risikoaversion im multiattributiven Fall zu erfassen ist. In Anlehnung an Courbage (2002) bezeichnen wir die sich auf jeweils nur ein Attribut beziehende Risikoeinstellung als *partielle Risikoeinstellung* und die sich auf die Gesamtheit aller Attribute beziehende als *totale Risikoeinstellung*.

Während die zu Grunde liegende partielle Risikoeinstellung bezüglich x_t, wie im eindimensionalen Fall, anhand des Vorzeichens der zweiten (partiellen) Ableitung von u nach x_t, $\partial^2 u(x_0, \ldots, x_T)/\partial x_t^2$, erschlossen werden kann, existieren in der Literatur zumindest zwei unterschiedliche Konzeptionen zur Erfassung der totalen Risikoeinstellung: Weiter verbreitet ist der auf Kihlstrom/Mirman (1974) zurückgehende Ansatz, wonach ein Entscheidungsträger genau dann total risikoavers ist, wenn für jeden beliebig verteilten Zahlungsstrom $(X_0, \ldots, X_T)$ gilt

$$(\mathrm{E}(X_0), \ldots, \mathrm{E}(X_T)) \succcurlyeq (X_0, \ldots, X_T), \tag{1}$$

wobei E den Erwartungswert-Operator bezeichnet. Bei Existenz einer multiattributiven Nutzenfunktion u ist (1) äquivalent dazu, dass eine entsprechende Ungleichung auch für die Nutzenerwartungswerte beider Seiten gilt:

$$\mathrm{E}[u(\mathrm{E}(X_0), \ldots, \mathrm{E}(X_T))] \geqq \mathrm{E}[u(X_0, \ldots, X_T)]. \tag{2}$$

Da der Ausdruck $u(\mathrm{E}(X_0), \ldots, \mathrm{E}(X_T))$ keinerlei Stochastik mehr birgt, ist der äußere Erwartungswert-Operator auf der linken Seite von (2) überflüssig, und (2) kann geschrieben werden als

$$u(\mathrm{E}(X_0), \ldots, \mathrm{E}(X_T)) \geqq \mathrm{E}[u(X_0, \ldots, X_T)]. \tag{3}$$

Es lässt sich zeigen, dass (3) für beliebig verteilte $(X_0,\dots,X_T)$ genau dann erfüllt ist, wenn u konkav ist: Dass (3) aus der Konkavität folgt, ist eine direkte Folge der Jensenschen Ungleichung, die in der multidimensionalen Version etwa bei Berger (1993), S. 343 f., bewiesen wird. Falls andererseits (3) gilt, so darf $(X_0,\dots,X_T)$ auch folgender Verteilung gehorchen: Seien $p \in [0;1]$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathrm{IR}^{T+1}$ beliebig und $(X_0,\dots,X_T)$ nehme mit Wahrscheinlichkeit p den Wert $\mathbf{x}$ und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ den Wert $\mathbf{y}$ an. Dann gilt $u(\mathrm{E}(X_0),\dots,\mathrm{E}(X_T)) = u(p\mathbf{x}+(1-p)\mathbf{y})$ sowie $\mathrm{E}[u(X_0,\dots,X_T)] = pu(\mathbf{x})+(1-p)u(\mathbf{y})$, und mithin ist die Definition der Konkavität erfüllt. Damit können wir insgesamt festhalten: Ein Entscheidungsträger ist genau dann total risikoavers im Sinne von Kihlstrom/Mirman (kurz: „KM-risikoavers"), wenn u konkav ist, das heißt (überall) eine negativ semidefinite Hessematrix $[\partial^2 u/(\partial x_{t_1}\partial x_{t_2})]_{T+1,T+1}$ besitzt.[4] Dann sind insbesondere auch alle zweiten partiellen Ableitungen $\partial^2 u/\partial x_t^2$ $(t=0,\dots,T)$ nichtnegativ, so dass ein KM-risikoaverser Entscheidungsträger auch partiell risikoavers bezüglich aller Attribute ist.

Ein derartiger zwingender Zusammenhang zwischen totaler und partieller Risikoeinstellung kann nicht mehr beobachtet werden, wenn man die zweite in der Literatur anzutreffende Konzeptionalisierung multivariater Risikoaversion verwendet. Diese wurde unabhängig voneinander von de Finetti (1952) beziehungsweise Richard (1975) vorgeschlagen und erfasst die Risikoeinstellung über den Vergleich binärer Lotterien. Unterstellt man beispielsweise einen Planungshorizont von zwei Perioden und nimmt man an, dass die zwei Zahlungsströme (X_0,X_1) sowie (Y_0,Y_1) mit

$$\begin{aligned} (X_0,X_1) &= \begin{cases} (a_0,a_1), & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ (b_0,b_1), & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\text{und} \\ (Y_0,Y_1) &= \begin{cases} (a_0,b_1), & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \\ (b_0,a_1), & \text{mit Wahrscheinlichkeit } \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

zur Auswahl stehen, wobei $a_0 < b_0$ und $a_1 < b_1$ gelten soll, so heißt ein Entscheidungsträger genau dann multivariat risikoavers im Sinne von de Finetti/Richard (kurz: „FR-risikoavers"), wenn er (Y_0,Y_1) gegenüber (X_0,X_1) präferiert. Offensichtlich ist (X_0,X_1) vom Typ „entweder beide Werte groß oder beide Werte klein", während die beiden denkbaren Realisationen von (Y_0,Y_1) Kombinationen von jeweils einer großen und einer kleinen Zahl sind. Insofern lässt sich die FR-Risikoaversion auch als eine Aversion gegenüber positiver zeitlicher Korrelation interpretieren. Bestimmt man die Differenz der Nutzenerwartungswerte der beiden Zahlungsströme, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathrm{E}u(X_0,X_1) - \mathrm{E}u(Y_0,Y_1) &= \tfrac{1}{2}[u(a_0,a_1)+u(b_0,b_1)-u(a_0,b_1)-u(b_0,a_1)] \\ &= \frac{1}{2}\int_{a_0}^{b_0}\int_{a_1}^{b_1} \frac{\partial^2 u(x_0,x_1)}{\partial x_0 \partial x_1}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_0 \end{aligned} \tag{5}$$

für beliebige Werte $a_0 < b_0$ und $a_1 < b_1$. Damit ist der Entscheidungsträger genau dann risikoavers im Sinne von de Finetti/Richard, wenn für die Kreuzableitung $\partial^2 u(x_0,x_1)/(\partial x_0 \partial x_1) \leqq 0$ gilt.[5] Während sich die KM-Risikoeinstellung stets auf alle Attribute bezieht, stellt die FR-Risikoeinstellung also auf den Vergleich von jeweils zwei Attributen ab.[6] Im allgemeinen Fall mit $T+1$ Attributen existieren $\binom{T+1}{2}$ derartige Paare, bezüglich derer sich die FR-Risikoeinstellung unterscheiden kann. So ist es etwa möglich, dass ein Entscheidungsträger in Bezug auf X_0, X_1 FR-risikoavers, bezüglich X_0, X_2 jedoch FR-risikofreudig ist. Insofern ist die FR-Risikoeinstellung nur dann eine totale Risikoeinstellung im Sinne unserer Definition, wenn sie hinsichtlich aller möglichen Paare übereinstimmt.[7] In diesem Fall ist ein Entscheidungsträger genau dann als total (FR-)risikoavers anzusehen, wenn *alle* Kreuzableitungen $\partial^2 u(x_0,\dots,x_T)/(\partial x_{t_1}\partial x_{t_2})$ (mit $t_1,t_2 = 0,\dots,T;\ t_1 \neq t_2$) kleiner oder gleich null sind.

Eine Schwachstelle der Risikoeinstellung im Sinne von de Finetti/Richard kann darin gesehen werden, dass diese nicht notwendigerweise mit der partiellen Risikoeinstellung übereinstimmen muss. Hierzu betrachte man folgendes Beispiel: Die zweidimensionale Nutzenfunktion $u: \mathrm{IR}_+^2 \to \mathrm{IR}$ sei gegeben durch $u(x_0,x_1) = 4 \cdot \sqrt{x_0 x_1}$. Ihre Hessematrix ist offenkundig

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 x_1}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{x_1}{x_0} & 1 \\ 1 & -\frac{x_0}{x_1} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Da die Kreuzableitung positiv ist, drückt u strikte FR-Risikofreude aus. Andererseits sind aber beide Hauptdiagonalelemente der Hessematrix negativ und ihre Determinante $(x_1/x_0 \cdot x_0/x_1 - 1^2)/\sqrt{x_0 x_1}$ gleich null, so dass der Entscheidungsträger KM- und insbesondere auch partiell risikoavers ist. Also stimmt die partielle Risikoeinstellung *nicht* notwendigerweise mit der Risikoeinstellung im Sinne von de Finetti/Richard überein, wohl aber mit derjenigen nach Kihlstrom/Mirman.

II. Sicherheitsäquivalent und Unternehmensbewertung

Im Folgenden werden wir der Frage nachgehen, welcher sichere Zahlungsstrom $(s,0,\ldots,0)$ als gleichwertig zu einem gegebenen stochastischen Zahlungsstrom $(X_0,X_1,\ldots,X_T)$ anzusehen ist. Den durch die Indifferenz

$$(s,0,\ldots,0) \sim (X_0,X_1,\ldots,X_T) \tag{7}$$

definierten Wert s bezeichnen wir dabei als das *für Bewertungsfragen relevante Sicherheitsäquivalent* des stochastischen Zahlungsstroms $(X_0,X_1,\ldots,X_T)$.[8] Das derart festgelegte Sicherheitsäquivalent ist also diejenige sichere Zahlung im Zeitpunkt $t = 0$, dem Bewertungszeitpunkt, die der Bewerter als gleichwertig gegenüber dem stochastischen Zahlungsstrom einstuft. Insofern stellt es eine zur Unternehmensbewertung geeignete Größe dar.

Existiert eine multiattributive Risikonutzenfunktion u, so ist die Indifferenz (7) äquivalent zu

$$u(s,0,\ldots,0) = \mathrm{E}u(X_0,X_1,\ldots,X_T). \tag{8}$$

Da wir u als in jedem Argument streng monoton wachsend unterstellt haben, ist u insbesondere auch im ersten Argument streng monoton wachsend, und wir können das Sicherheitäquivalent angeben als

$$S(X_0,X_1,\ldots,X_T) = \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}u(X_0,X_1,\ldots,X_T)], \tag{9}$$

wobei die streng monotone Funktion $\tilde{u}$ durch $\tilde{u}(x) = u(x,0,\ldots,0)$ bestimmt ist und S den Sicherheitäquivalent-Operator bezeichnet. Die Funktion $\tilde{u}$ ist also eine klassische uniattributive Risikonutzenfunktion, die im Zeitpunkt $t = 0$ unmittelbar fällige Zahlungen bewertet.

C. Kapitalmarktkompatible Unternehmensbewertung

Nun ergänzen wir die individualistische Welt durch einen Kapitalmarkt im Sinne eines perfekten Geldmarkts, das heißt wir unterstellen, dass in den Zeitpunkten $t = 0,\ldots,T-1$ Finanzmittel für eine Laufzeit von einer Periode zum sicheren Zinssatz i angelegt beziehungsweise beschafft werden können. Über die Existenz eines risikolosen Zinssatzes hinaus fordern wir keinerlei Eigenschaften des Kapitalmarkts, wie etwa eine Eignung zur Duplikation risikobehafteter Cashflows. In diesem Sinne ist unser Ansatz mit dem „semi-subjektiven“ Ansatz von Kruschwitz/Löffler (2003) vergleichbar. Allerdings unterscheidet sich unser weiteres Vorgehen insofern von Kruschwitz/Löffler, als wir die unseres Erachtens zur Unternehmensbewertung geeigneten Nutzenfunktionen durch die Invarianzforderung charakterisieren, dass die durch den Markt gegebenen Möglichkeiten, den Zahlungsstrom durch Geldanlage beziehungsweise Verschuldung zum sicheren Zinssatz präferenzerhaltend zu transformieren, nicht bewertungsrelevant sein sollen. Kruschwitz/Löffler (2003) hingegen diskutieren eine konkret vorgegebene additive Nutzenfunktion und optimieren für diese die Geldanlage beziehungsweise Verschuldung.

Bei Existenz eines sicheren Zinssatzes ist es unseres Erachtens nicht sinnvoll, den zu bewertenden Zahlungsstrom, wie bei einer rein individualistischen Analyse, als unabänderlich anzusehen. So werden auch bei der Begründung des traditionellen Kapitalwerts von deterministischen Zahlungsströmen Verschuldung beziehungsweise Anlage zum Zinssatz i zu jedem Zeitpunkt als zulässige Aktionen betrachtet. Auf diese Weise wird der deterministische Zahlungsstrom $(x_0, x_1, \ldots, x_T)$ in den gleichwertigen Strom $(NPV, 0, \ldots, 0)$ transformiert, wobei *NPV* den Netto-Kapitalwert (Net Present Value) bezeichnet. Analog dazu eröffnet der Kapitalmarkt dem Entscheidungsträger die Möglichkeit, einen gegebenen stochastischen Zahlungsstrom $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ in gewissem Rahmen abzuändern. Unterstellt man vereinfachend eine flache Zinsstruktur[9] sowie die Identität von Soll- und Habenzins, so kann zu jedem Zeitpunkt $t = 0, \ldots, T-1$ ein sicherer Geldbetrag in Höhe von z_t für eine Periode angelegt beziehungsweise aufgenommen werden. Wir unterstellen also, dass nur *sichere* Cashflows verschoben werden. Somit bleibt die intertemporale Abhängigkeitsstruktur unverändert,[10] und es resultiert der transformierte Zahlungsstrom

$$(X_0 - z_0, X_1 + qz_0 - z_1, X_2 + qz_1 - z_2, \ldots, X_T + qz_{T-1}), \tag{10}$$

wobei $q = 1 + i$ den risikofreien Zinsfaktor bezeichnet. Da die sicheren Geldbeträge z_t sowie die für die Nachfolgeperioden relevanten aufgezinsten Beträge qz_t bereits im Bewertungszeitpunkt $t = 0$ planbar beziehungsweise antizipierbar sind, sollte der mit den sicheren Zahlungen transformierte Zahlungsstrom nicht anders als der ursprüngliche Zahlungsstrom bewertet werden. Bei Verwendung einer beliebigen multiattributiven Nutzenfunktion u hängt die Bewertung von (10) allerdings von den Termen $z_0, \ldots, z_{T-1}$ ab, welche andererseits aber frei gewählt werden dürfen. Wir werden deshalb im Folgenden aus allen Risikonutzenfunktionen diejenigen herausfiltern, die der Beliebigkeit der Wahl der z_t dadurch Rechnung tragen, dass das Sicherheitsäquivalent von (10) von $z_0, \ldots, z_{T-1}$ unabhängig ist, das heißt, dass für jeden Zahlungsstrom $(X_0, \ldots, X_T)$ gilt

$$S(X_0, \ldots, X_T) = S(X_0 - z_0, X_1 + qz_0 - z_1, \ldots, X_T + qz_{T-1}) \tag{11}$$

für alle $z_0, \ldots, z_{T-1}$. Eine Risikonutzenfunktion u, die dieser Irrelevanz- beziehungsweise Kompatibilitätsbedingung genügt, bezeichnen wir als *kapitalmarktkompatibel*. Der nachfolgende Satz 1 liefert eine vollständige Charakterisierung aller kapitalmarktkompatiblen Risikonutzenfunktionen.

Satz 1 *Eine multiattributive Risikonutzenfunktion $u(x_0, \ldots, x_T)$ ist genau dann kapitalmarktkompatibel, wenn*

$$u(x_0, \ldots, x_T) = u\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}, 0, \ldots, 0\right)$$

gilt, das heißt, wenn sich die Bewertung ausschließlich am Kapitalwert orientiert.

Den Beweis zu Satz 1 sowie die Beweise zu den Sätzen 2 und 3 findet der interessierte Leser im Anhang. Nun kann das für Bewertungsfragen relevante Sicherheitsäquivalent s des Zahlungsstroms $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ angegeben werden: Wegen (9) in Verbindung mit Satz 1 gilt

$$s = \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}u(X_0, X_1, \ldots, X_T)] = \tilde{u}^{-1}\left[\mathrm{E}u\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{X_t}{q^t}, 0, \ldots, 0\right)\right]. \tag{12}$$

Kürzer kann (12) als

$$\boxed{s = \tilde{u}^{-1}\left[\mathrm{E}\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{X_t}{q^t}\right)\right]} \tag{13}$$

geschrieben werden. Damit bewertet jede kapitalmarktkompatible multiattributive Nutzenfunktion u den Zahlungsstrom $(X_0, X_1, \ldots, X_T)$ ausschließlich anhand seines (stochastischen) Kapitalwerts,[11] der wie eine Zahlung im Zeitpunkt $t = 0$ behandelt wird.[12] Das gemäß (13) bestimmte Sicherheitsäquivalent bezeichnen wir im Folgenden in Anlehnung an Kürsten (2002), S. 142, als die Bewertungsziffer der *Risikoanalyse*.[13]

Wie bereits angedeutet, lässt sich Satz 1 auch für den Fall einer nichtflachen Zinsstruktur formulieren. In diesem Fall erhält man folgende Variante:

Satz 1 a *Eine multiattributive Risikonutzenfunktion $u(x_0,\ldots,x_T)$ ist genau dann kapitalmarktkompatibel, wenn*

$$u(x_0,\ldots,x_T) = u\left(\sum_{t=0}^{T} x_t \cdot \prod_{i=0}^{t-1} q_i^{-1}, 0, \ldots, 0\right)$$

gilt, wobei q_t den der Forward Rate von Periode t zu Periode $t+1$ entsprechenden Zinsfaktor bezeichnet.

Der Beweis dieser Aussage entspricht dem Beweis zu Satz 1, wobei lediglich die Diskontfaktoren q^{-t} durch die Produkte $q_0^{-1} \cdot \ldots \cdot q_{t-1}^{-1}$ zu ersetzen sind. Diese leichte Verallgemeinerung ist ohne technische Schwierigkeiten möglich, bietet aber keine neuen Einsichten in das betrachtete Problem und wird deshalb zu Gunsten einer strafferen Präsentation nicht wiedergegeben.

In Abschnitt B.I wurden unterschiedliche Möglichkeiten diskutiert, die (durch eine multiattributive Nutzenfunktion zum Ausdruck gebrachte) Risikoeinstellung zu konkretisieren. Während die dort angesprochenen Konzeptionen im Allgemeinen zu unterschiedlichen Qualifizierungen gelangen, ist eine derartige Abgrenzung im Kontext kapitalmarktkompatibler Nutzenfunktionen nicht zwingend erforderlich: Sofern die multiattributive Risikonutzenfunktion $u(x_0,\ldots,x_T)$ kapitalmarktkompatibel ist, stimmen die durch sie zum Ausdruck gebrachte totale Risikoeinstellung im Sinne von Kihlstrom/Mirman, die Risikoeinstellung im Sinne von de Finetti/Richard sowie die partiellen Risikoeinstellungen bezüglich aller Attribute stets überein. Verwendet man nämlich Satz 1 sowie die in (9) eingeführte Funktion $\tilde{u}$, so erhält man für die zweite partielle Ableitung von $u(x_0,\ldots,x_T)$ nach x_{t_1} und x_{t_2}

$$\frac{\partial^2 u(x_0,\ldots,x_T)}{\partial x_{t_1}\partial x_{t_2}} = \frac{\partial^2}{\partial x_{t_1}\partial x_{t_2}}\,\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right) = \frac{1}{q^{t_1+t_2}}\cdot\tilde{u}''\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right) \tag{14}$$

mit $t_1, t_2 = 0,\ldots,T$. Die zweiten partiellen Ableitungen von u unterscheiden sich also nur bezüglich des Faktors $q^{-(t_1+t_2)}$, welcher wegen $q > 0$ stets positiv ist. Folglich haben alle zweiten Ableitungen von u das selbe Vorzeichen wie die zweite Ableitung der uniattributiven Nutzenfunktion $\tilde{u}$. Das heißt insbesondere, dass sich die partiellen Risikoeinstellungen bezüglich aller Attribute decken, die FR-Risikoeinstellung bezüglich aller Paare von Attributen übereinstimmt und die partielle mit der FR-Risikoeinstellung zusammenfällt.[14] Ferner kann man die FR-Risikoeinstellung im Kontext kapitalmarktkompatibler Nutzenmessung auch bei mehr als zwei Attributen sinnvoll als totale Risikoeinstellung interpretieren, da sie bezüglich aller Paare von Attributen übereinstimmt.[15] Schreibt man schließlich u als Verknüpfung $\tilde{u} \circ NPV$ mit

$$NPV(x_0,\ldots,x_T) = \sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}, \tag{15}$$

so lässt sich auf Grund der Linearität des Kapitalwerts NPV sofort erkennen, dass u und $\tilde{u}$ die gleichen Konkavitätseigenschaften besitzen. Folglich muss sich die KM-Risikoeinstellung mit der bezüglich aller Attribute gleichen partiellen Risikoeinstellung – und damit auch mit der FR-Risikoeinstellung – decken.

Die durch Satz 1 charakterisierte Risikoanalyse sieht eine Bewertung des Unternehmens anhand des gemäß (13) bestimmten Sicherheitsäquivalents des stochastischen Kapitalwerts vor. Folgt man hingegen der in der Praxis beliebten Sicherheitsäquivalentmethode,[16] so müsste sich der Unternehmenswert als die Summe der auf den Zeitpunkt $t = 0$ abgezinsten Sicherheitsäquivalente der einzelnen (stochastischen) Cashflows X_t ergeben:

$$\sum_{t=0}^{T}\frac{\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_t)]}{q^t}. \tag{16}$$

Diese Bewertungsvorschrift unterscheidet sich von der Vorgehensweise der Risikoanalyse dahingehend, dass in (13) *zuerst* die Verteilung des stochastischen Kapitalwerts ermittelt wird und *danach* dessen Sicherheitsäquivalent. Bei der Sicherheitsäquivalentmethode hingegen werden diese beiden Schritte in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen: Man bestimmt zuerst die Sicherheitsäquivalente der stochastischen Cashflows und danach den Kapitalwert dieser Sicherheitsäquivalente.[17] Diese Beobachtung wirft die nahe liegenden Fragen auf, unter welchen Bedingungen beide Methoden miteinander verträglich sind, beziehungsweise unter welchen Umständen die Vorgehensweise (16) als in unserem Kontext problematisch, da mit Satz 1 inkonsistent und somit nicht kapitalmarktkompatibel, anzusehen ist. Diese Fragen beantwortet der nächste Satz.

Satz 2 *Ist u kapitalmarktkompatibel, so gilt*

$$\tilde{u}^{-1}\left[\mathrm{E}\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{X_t}{q^t}\right)\right]=\sum_{t=0}^{T}\frac{\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_t)]}{q^t}$$

für alle Werte von $q>0$ sowie für alle Verteilungen von $(X_0,\dots,X_T)$ genau dann, wenn die in (9) eingeführte uniattributive Risikonutzenfunktion $\tilde{u}$ affin-linear ist. Das heißt, dass nur bei Risikoneutralität des Bewerters garantiert werden kann, dass die Sicherheitsäquivalentmethode eine kapitalmarktkompatible Bewertung generiert.

Dieses Resultat bekräftigt die von Kürsten (2002) geäußerten Vorbehalte gegenüber der Sicherheitsäquivalentmethode.[18] Andererseits argumentieren Kruschwitz/Löffler (2003), S. 1340, dass die Sicherheitsäquivalentmethode unter speziellen Bedingungen ökonomisch durchaus gerechtfertigt werden könne. Dies belegen sie für den Fall konstanter absoluter Risikoaversion unter Zugrundelegung einer additiven Risikonutzenfunktion vom Typ

$$u(x_0,\dots,x_T)=a+\sum_{t=0}^{T}b_t\,\hat{u}(x_t). \tag{17}$$

Tatsächlich lässt sich in diesem Kontext die Bewertungsgleichung (16) der Sicherheitsäquivalentmethode reproduzieren. Ursächlich hierfür ist unseres Erachtens die von Kruschwitz/Löffler per Annahme vorgegebene Nutzenfunktion. Diese rechtfertigen Kruschwitz/Löffler mit dem Hinweis, dass ein zur Fundierung von (17) geeignetes Axiomensystem gefunden werden könne. Im hier betrachteten Rahmen trifft dies indes nicht zu, wie Satz 3 belegt.

Satz 3 *Ist u kapitalmarktkompatibel, so existieren genau dann Koeffizienten $a,b_0,\dots,b_T\in\mathbb{R}$ derart, dass*

$$u(x_0,\dots,x_T)=\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right)=a+\sum_{t=0}^{T}b_t\,\hat{u}(x_t)$$

gilt, wenn $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ affin-linear sind. Das heißt, dass additive multiattributive Nutzenfunktionen nur bei Risikoneutralität des Bewerters Kapitalmarktkompatibilität garantieren können und deshalb keine Rechtfertigung der Sicherheitsäquivalentmethode liefern.

D. Diskussion und Ausblick

Satz 3 relativiert unseres Erachtens die von Kruschwitz/Löffler konstatierte Beobachtung, dass sich die Sicherheitsäquivalentmethode unter speziellen Bedingungen ökonomisch rechtfertigen lässt. Andererseits kann der von uns als Alternative zur Sicherheitsäquivalentmethode vorgeschlagenen Bewertungsvorschrift (13) entgegengehalten werden, dass für ihre Anwendung die Verteilung des stochastischen Kapitalwerts bekannt sein muss. Die Bestimmung dieser Verteilung erfordert Faltungen, was, je nach den Verteilungen der zu Grunde liegenden Cashflows, einen nicht unerheblichen Rechenaufwand bedeuten kann. In derartigen Fällen könnte ein praktikabler Ausweg darin bestehen, die Verteilung des Kapitalwerts nicht mathematisch exakt, sondern zum Beispiel mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation zu bestimmen. Derartige Techniken werden bereits seit längerem diskutiert[19] und können mittlerweile als etabliert angesehen werden.

Wird hingegen eine geschlossene Bewertungsgleichung ohne explizite Faltung gewünscht, so ist die simulierte Verteilung durch eine andere geeignete Approximation zu ersetzen. Geht man etwa von der Annahme normalverteilter Cashflows aus, welche vor einem Praxiseinsatz auf ihre Plausibilität hin zu prüfen wäre, so ist auch der Kapitalwert normalverteilt. In diesem Fall wird die Verteilung des Kapitalwerts vollständig durch Angabe seines Erwartungswerts und seiner Varianz beschrieben, so dass sich die im Allgemeinen komplizierte Faltung auf die Bestimmung der ersten beiden Momente reduziert. Der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 des stochastischen Kapitalwerts errechnen sich dann wie folgt aus den Erwartungswerten μ_t und den Varianzen σ_t^2 der stochastischen Cashflows X_t ($t = 0,\ldots,T$) sowie deren paarweisen Korrelationskoeffizienten $\rho_{t_1t_2} = \mathrm{Corr}(X_{t_1}, X_{t_2})$ ($t_1, t_2 = 0,\ldots,T$):[20]

$$\mu = \sum_{t=0}^{T} \frac{\mu_t}{q^t} \qquad \text{und} \qquad \sigma^2 = \sum_{t=0}^{T} \frac{\sigma_t^2}{q^{2t}} + 2\sum_{t_1<t_2} \frac{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}{q^{t_1+t_2}} \cdot \rho_{t_1t_2}. \tag{18}$$

Eine weitere Vereinfachung lässt sich erreichen, wenn man die Normalverteilungsannahme mit der Annahme konstanter absoluter Risikoaversion des Bewerters kombiniert. Dieser bewertet den stochastischen Kapitalwert dann nach Maßgabe der exponentiellen von Neumann/Morgenstern-Nutzenfunktion

$$\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}\right) = -\exp\left\{-\alpha \sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}\right\}, \tag{19}$$

wobei α das (konstante) Arrow-Pratt-Maß seiner absoluten Risikoaversion ist. Ein bekanntes Resultat der Entscheidungstheorie besagt, dass sich bei konstanter absoluter Risikoaversion α das Sicherheitsäquivalent einer mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 normalverteilten Zufallsvariablen X gemäß $S(X) = \mu - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2$ errechnet. Unter Berücksichtigung von (18) ergibt sich dann folgende explizite Formel für die Bewertungsziffer der Risikoanalyse:

$$s = \sum_{t=0}^{T} \frac{\mu_t}{q^t} - \frac{\alpha}{2} \sum_{t=0}^{T} \frac{\sigma_t^2}{q^{2t}} - \alpha \sum_{t_1<t_2} \frac{\sigma_{t_1}\sigma_{t_2}}{q^{t_1+t_2}} \cdot \rho_{t_1t_2}. \tag{20}$$

Diese Bewertungsgleichung benötigt neben den Erwartungswerten und den Varianzen der Cashflows sowie ihrer paarweisen Korrelationskoeffizienten lediglich Informationen über die Risikoaversion des Bewerters sowie über den sicheren Zinssatz. Insofern scheint eine gewisse Praxistauglichkeit gegeben zu sein. Ein weiteres Indiz hierfür ist die Tatsache, dass die Bewertungsvorschrift „Unternehmenswert = Sicherheitsäquivalent des normalverteilten Kapitalwerts bei konstanter absoluter Risikoaversion" bereits mehrfach in der Literatur Verwendung fand,[21] zumeist jedoch ohne (entscheidungs)theoretische Fundierung.

Zur Illustration der approximativen Risikoanalyse gemäß (20) verwenden wir folgendes Zahlenbeispiel: Ein Entscheidungsträger mit einer konstanten absoluten Risikoaversion $\alpha = 2$ und einem Planungshorizont $T = 2$ haben den stochastischen Zahlungsstrom $(0, X_1, X_2)$ zu bewerten. Alle Cashflows werden in Tausend Euro gemessen und als normalverteilt angenommen, wobei X_1 den Erwartungswert $\mu_1 = 500$ sowie die Varianz $\sigma_1^2 = 25$ und X_2 den Erwartungswert $\mu_2 = 700$ sowie die Varianz $\sigma_2^2 = 100$ besitze. Als risikofreier Periodenzins wird $i = 0{,}02$ angenommen. Bezeichnet man schließlich den Korrelationkoeffizienten $\mathrm{Corr}(X_1, X_2)$ kurz mit ρ, so ergibt sich aus (20) folgender Unternehmenswert: $1\,046{,}60 - 94{,}23\rho$. Würde man anstelle der Risikoanalyse die Sicherheitsäquivalentmethode (16) verwenden, so erhielte man im hier betrachteten Beispiel die Bewertung $(500-25)/1{,}02 + (700-100)/1{,}02^2 = 1042{,}39$. Augenfällig ist insbesondere das bereits in Anmerkung 17 angedeutete Phänomen, dass sich die beiden Methoden im Hinblick auf die (Nicht-)Berücksichtigung der intertemporalen Abhängigkeitsstruktur unterscheiden: Während diese bei Anwendung der Sicherheitsäquivalentmethode außen vor bleibt, findet sie Eingang in die Bewertungsziffer der Risikoanalyse. So wird die Tatsache, dass positiv korrelierte Cashflows ein höheres Risiko im Sinne einer größeren Varianz des Kapitalwerts bedeuten, im hier betrachteten Beispiel mit einem von ρ abhängigen Abschlag „bestraft". Ist die Korrelation hinreichend groß, im Beispiel etwa $\rho > 0{,}045$, so weist die Risikoanalyse einen geringeren Unternehmenswert aus als die Sicherheitsäquivalentmethode.[22]

Abschließend sei kurz die nahe liegende Frage angesprochen, ob die von uns verwendete Irrelevanzbedingung auch für solche Kapitalmärkte sinnvoll ist, die reichhaltiger als der hier betrachtete perfekte Geldmarkt sind. Dies ist im Allgemeinen zu verneinen. So belegen etwa Bamberg/Dorfleitner/Krapp (2004) im Rahmen des State-Preference-Ansatzes,[23] dass im Falle eines vollständigen und arbitragefreien Kapitalmarkts *keine* in allen Cashflows streng monotone Risikonutzenfunktion existiert, die in dem Sinne kapitalmarktkompatibel ist, als sie die Bewertung mittels Duplizierungstechnik zu reproduzieren im Stande wäre.

Anhang

Beweis zu Satz 1

Es gelte die Kompatibilitätsbedingung (11). Da (11) insbesondere auch für einen deterministischen Zahlungsstrom $(x_0,\ldots,x_T)$ gilt, muss

$$S(x_0 - z_0, x_1 + q z_0 - z_1, \ldots, x_T + q z_{T-1}) \tag{A.1}$$

unabhängig von der Wahl der Anlagebeträge $z_0,\ldots,z_{T-1}$ sein. Nun kann man die z_t so wählen, wie man es von der Begründung des klassischen Kapitalwerts als Entscheidungskriterium her kennt: Es werden bis auf $t=0$ alle Komponenten in (A.1) gleich null gesetzt, das heißt

$$z_t = \frac{-x_{t+1} + z_{t+1}}{q} \tag{A.2}$$

für alle $t = 0,\ldots,T-1$ gewählt, wobei $z_T = 0$ vereinbart sei. Damit erhält man sukzessive

$$\begin{aligned}
z_{T-1} &= -\frac{x_T}{q}\\
z_{T-2} &= -\frac{-x_{T-1} + z_{T-1}}{q} = -\frac{x_{T-1}}{q} - \frac{x_T}{q^2}\\
z_{T-3} &= -\frac{-x_{T-2} + z_{T-2}}{q} = -\frac{x_{T-2}}{q} - \frac{x_{T-1}}{q^2} - \frac{x_T}{q^3}\\
&\cdots\\
z_0 &= -\frac{-x_1 + z_1}{q} \qquad = -\frac{x_1}{q} - \frac{x_2}{q^2} \cdots - \frac{x_T}{q^T},
\end{aligned} \tag{A.3}$$

und somit

$$x_0 - z_0 = \sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}. \tag{A.4}$$

Mithin wird (A.1) identisch mit

$$S\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}, 0, \ldots, 0\right). \tag{A.5}$$

Kürzt man das von der Wahl der z_t unabhängige Sicherheitsäquivalent (A.5) mit s ab, so gilt nach (8):

$$u(s,0,\ldots,0) = u(x_0 - z_0, x_1 + q z_0 - z_1, \ldots, x_T + q z_{T-1}). \tag{A.6}$$

Setzt man in (A.6) alle z_t gleich null, so resultiert

$$u(s,0,\ldots,0) = u(x_0, x_1, \ldots, x_T); \tag{A.7}$$

legt man dagegen die z_t gemäß (A.2) fest, so resultiert

$$u(s,0,\ldots,0) = u\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}, 0, \ldots, 0\right). \tag{A.8}$$

Die rechten Seiten von (A.7) und (A.8) müssen also identisch sein. Gleichsetzen liefert die behauptete Struktur der Risikonutzenfunktion.

Sei umgekehrt die Risikonutzenfunktion u von der in Satz 1 konstatierten Struktur. Dann ist zu zeigen, dass die Kompatibilitätsbedingung (11) erfüllt ist. Kürzen wir das (möglicherweise von der Wahl der z_t abhängige) Sicherheitsäquivalent mit s ab, so gilt nach (8):

$$u(s,0,\ldots,0) = \mathrm{E}u(X_0 - z_0, X_1 + qz_0 - z_1, \ldots, X_T + qz_{T-1}). \tag{A.9}$$

Nach Voraussetzung hat u die Struktur

$$u(x_0,x_1,\ldots,x_T) = u(NPV(\mathbf{x}),0,\ldots,0), \tag{A.10}$$

wobei $NPV(\mathbf{x})$ eine Abkürzung für den Netto-Kapitalwert von $\mathbf{x} = (x_0,\ldots,x_T)$ ist. Damit wird aus (A.9)

$$u(s,0,\ldots,0) = \mathrm{E}u(NPV(\mathbf{X}) + NPV(\mathbf{z}),0,\ldots,0), \tag{A.11}$$

wobei $NPV(\mathbf{X})$ den Kapitalwert des stochastischen Zahlungsstroms $\mathbf{X} = (X_0,X_1,\ldots,X_T)$ und $NPV(\mathbf{z})$ den Kapitalwert des deterministischen Zahlungsstroms $\mathbf{z} = (-z_0, qz_0 - z_1, \ldots, qz_{T-1})$ bezeichnet. Wie man leicht nachrechnet, ist $NPV(\mathbf{z}) = 0$:

$$\begin{aligned} NPV(\mathbf{z}) &= -z_0 + \frac{1}{q}\cdot(qz_0 - z_1) + \frac{1}{q^2}\cdot(qz_1 - z_2) + \cdots + \frac{1}{q^{T-1}}\cdot(qz_{T-2} - z_{T-1}) + \frac{1}{q^T}\cdot qz_{T-1} \\ &= -z_0 + z_0 - \frac{z_1}{q} + \frac{z_1}{q} - \frac{z_2}{q^2} + \cdots + \frac{z_{T-2}}{q^{T-2}} - \frac{z_{T-1}}{q^{T-1}} + \frac{z_{T-1}}{q^{T-1}} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{A.12}$$

Damit ist das Sicherheitsäquivalent s von der speziellen Wahl der z_t unabhängig und die Kompatibilitätsbedingung (11) erfüllt. ■

Beweis zu Satz 2

Wird $\tilde{u}$ als affin-linear vorausgesetzt, so folgt aus der Linearität des Erwartungswerts, dass die Verknüpfung $\tilde{u}^{-1} \circ \mathrm{E} \circ \tilde{u}$ ebenfalls ein linearer Operator ist. Somit gilt:

$$\tilde{u}^{-1}\left[\mathrm{E}\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{X_t}{q^t}\right)\right] = \sum_{t=0}^{T} \frac{\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_t)]}{q^t}. \tag{A.13}$$

Zu zeigen bleibt demnach noch, dass (A.13) die affine Linearität von $\tilde{u}$ impliziert: Es gelte (A.13). Um zu zeigen, dass $\tilde{u}$ affin-linear sein muss, verwenden wir einen Widerspruchsbeweis. Wir gehen also von der Annahme aus, $\tilde{u}$ sei nicht affin-linear und konstruieren ein Gegenbeispiel. Für dieses legen wir $q = T = 1$ fest. Aus (A.13) folgt

$$\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0 + X_1)] = \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0)] + \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_1)] \tag{A.14}$$

(für alle Verteilungen von X_0 und X_1). Da $\tilde{u}$ nicht affin-linear ist, existiert (mindestens) ein Teilbereich $[\alpha,\beta]$ des Definitionsbereichs von $\tilde{u}$ mit der Eigenschaft

$$\text{entweder} \quad \tilde{u}(x) > g(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta) \quad \text{oder} \quad \tilde{u}(x) < g(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta), \tag{A.15}$$

wobei g die Verbindungsgerade durch die Punkte $(\alpha,\tilde{u}(\alpha))$ und $(\beta,\tilde{u}(\beta))$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass die Zufallsvariable X_0 nur die beiden Realsationen α und β mit $\mathrm{P}(X_0 = \alpha) = \mathrm{P}(X_0 = \beta) = \frac{1}{2}$ besitzt und dass darüber hinaus $X_1 = \alpha + \beta - X_0$ gilt. X_0 und X_1 sind also annahmegemäß identisch verteilt und perfekt negativ korreliert ($X_0 = \alpha \iff X_1 = \alpha+\beta-\alpha = \beta$ und $X_0 = \beta \iff X_1 = \alpha+\beta-\beta = \alpha$). Für das Sicherheitsäquivalent von $X_0 + X_1$ gilt dann offensichtlich

$$\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0+X_1)] = \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(\alpha+\beta)] = \tilde{u}^{-1}[\tilde{u}(\alpha+\beta)] = \alpha+\beta. \tag{A.16}$$

Außerdem folgt aus der Verteilungsannahme in Verbindung mit der affinen Linearität von g:

$$\mathrm{E}\tilde{u}(X_0) = \mathrm{E}\tilde{u}(X_1) = \tfrac{1}{2}\,\tilde{u}(\alpha) + \tfrac{1}{2}\tilde{u}(\beta) = \tfrac{1}{2}\,g(\alpha) + \tfrac{1}{2}\,g(\beta) = g\big(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big). \tag{A.17}$$

Dies impliziert

$$\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0)] = \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_1)] = \tilde{u}^{-1}\big[g\big(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big)\big]. \tag{A.18}$$

Auf Grund von (A.15) gilt für alle $x \in (\alpha,\beta)$: $\tilde{u}(x) \neq g(x)$ und damit $\tilde{u}^{-1}[g(x)] \neq x$. Da $\frac{\alpha+\beta}{2} \in (\alpha,\beta)$ ist, können wir aus (A.18) folgern:

$$\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0)] + \tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_1)] = 2\cdot\tilde{u}^{-1}\big[g\big(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\big)\big] \neq 2\cdot\tfrac{\alpha+\beta}{2} = \alpha+\beta. \tag{A.19}$$

Ein Vergleich von (A.16) und (A.19) ergibt

$$\tilde{u}^{-1}[\mathrm{E}\tilde{u}(X_0+X_1)] = \alpha+\beta \neq \tilde{u}^{-1}[E\,\tilde{u}(X_0)] + \tilde{u}^{-1}[E\,\tilde{u}(X_1)], \tag{A.20}$$

was im Widerspruch zu (A.14) steht. Folglich kann nur eine affin-lineare Nutzenfunktion $\tilde{u}$ sicherstellen, dass (A.13) stets erfüllt ist. ∎

Beweis zu Satz 3

Auf Grund von Satz 1 ist bekannt, dass jede kapitalmarktkompatible multiattributive Nutzenfunktion $u(x_0,\ldots,x_T)$ auch gemäß $\tilde{u}(x_0 + x_1 q^{-1} + \cdots + x_T q^{-T})$ dargestellt werden kann. Folglich bleibt nachzuweisen, dass

$$\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right) = a + \sum_{t=0}^{T} b_t\,\hat{u}(x_t) \tag{A.21}$$

genau dann (durch geeignete Wahl von $a, b_0, \ldots, b_T$) erfüllt wird, wenn $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ affin-linear sind. Setzt man die affine Linearität von $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ voraus, so gilt (A.21) offenkundig, wenn man

$$a = \tilde{u}(0) - \hat{u}(0)\cdot\sum_{t=0}^{T} b_t \qquad \text{und} \qquad b_t = \frac{1}{q^t}\cdot\frac{\tilde{u}(1)-\tilde{u}(0)}{\hat{u}(1)-\hat{u}(0)} \quad \forall\, t = 0,\ldots,T \tag{A.22}$$

wählt. Zu zeigen bleibt noch, dass (A.21) die affine Linearität von $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ impliziert. Offenbar besitzt $\tilde{u}$ die Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x_t}\,\tilde{u}\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right) = \frac{1}{q^t}\cdot\tilde{u}'\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right). \tag{A.23}$$

Leitet man nun die rechte Seite von (A.21) ebenfalls partiell nach x_t ab, so erhält man

$$\frac{\partial}{\partial x_t}\left[a + \sum_{t=0}^{T} b_t\,\hat{u}(x_t)\right] = b_t\cdot\hat{u}'(x_t). \tag{A.24}$$

Wenn (A.21) erfüllt ist, müssen insbesondere auch (A.23) und (A.24) gleich sein:

$$\frac{1}{q^t}\cdot\tilde{u}'\left(\sum_{t=0}^{T}\frac{x_t}{q^t}\right) = b_t\cdot\hat{u}'(x_t). \tag{A.25}$$

Hieraus kann man für alle $t = 0, \dots, T$ folgern:

$$\tilde{u}'\left(\sum_{t=0}^{T} \frac{x_t}{q^t}\right) = q^t b_t \cdot \hat{u}'(x_t) \quad \forall (x_0, \dots, x_T). \tag{A.26}$$

Nun seien x_t beliebig, aber fest und x_i (mit $i = 0, \dots, T;\ i \neq t$) beliebig gewählt. Dann ist die rechte Seite von (A.26) konstant. Daraus folgt, dass die Funktion $\tilde{u}'$ auf der linken Seite von (A.26) allen Werten ihres Arguments den gleichen Funktionswert zuordnet, also ebenfalls konstant sein muss. In Verbindung mit der Tatsache, dass x_t auf einen *beliebigen* Wert fixiert wurde, impliziert dies die Konstanz der Funktion $\hat{u}'$ auf der rechten Seite von (A.26). Folglich müssen sowohl $\tilde{u}$ als auch $\hat{u}$ affin-linear sein. ∎

Anmerkungen

1 Vergleiche den Disput von Schwetzler (2000 a), (2000 b), (2002), Kürsten (2002), (2003), Diedrich (2003), Wiese (2003), Kruschwitz/Löffler (2003) und Wilhelm (2003).

2 Siehe hierzu Debreu (1954). Gefordert wird nur die Abgeschlossenheit der so genannten „Schlechtermengen" und „Bessermengen".

3 An dieser Stelle sei an die lange Jahre geführte und bis heute andauernde Diskussion erinnert, welche Präferenzen das Bernoulli-Prinzip tatsächlich berücksichtigt. Wir wollen uns an dieser Diskussion nicht beteiligen, verweisen den interessierten Leser auf die klärenden Artikel von Kürsten (1992 a), (1992 b) und beschränken uns im Folgenden auf die Untersuchung von Risikopräferenzen.

4 Analog dazu liegt strikte KM-Risikoaversion vor, wenn die Hessematrix negativ definit ist, KM-Risikofreude, wenn die Hessematrix positiv semidefinit ist, strikte KM-Risikofreude, wenn die Hessematrix positiv definit ist und KM-Risikoneutralität, wenn die Hessematrix gleich der Nullmatrix ist.

5 Analog dazu liegt strikte FR-Risikoaversion vor, wenn die Kreuzableitung negativ ist, FR-Risikofreude, wenn die Kreuzableitung nichtnegativ ist, strikte FR-Risikofreude, wenn die Kreuzableitung positiv ist und FR-Risikoneutralität, wenn die Kreuzableitung gleich null ist.

6 Vergleiche Richard (1975), S. 18: „multivariate risk aversion is a pairwise property".

7 Meyer (1976), S. 491 f., schlägt eine andere Konzeptionalisierung der totalen Risikoeinstellung vor: Nach seiner Definition ist ein Enscheidungsträger genau dann (total) risikoavers, wenn er $T+1$ unabhängige Lotterien, bei denen mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$ entweder a_t oder b_t (mit $a_t < b_t$; $t = 0, \dots, T$) resultieren, präferiert gegebenüber einer einmaligen Lotterie, bei der mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{2}$ entweder $(a_0, \dots, a_T)$ oder $(b_0, \dots, b_T)$ resultieren.

8 Natürlich ist eine Vielzahl anderer Definitionen des Sicherheitsäquivalents von $(X_0, X_1, \dots, X_T)$ ebenso denkbar. Insbesondere kann jeder sichere Zahlungsstrom $(s_0, s_1, \dots, s_T)$ mit $(s_0, s_1, \dots, s_T) \sim (X_0, X_1, \dots, X_T)$ als (multivariates) Sicherheitsäquivalent von $(X_0, X_1, \dots, X_T)$ angesehen werden. Derartige Varianten benötigen wir für unsere Fragestellung aber nicht.

9 Diese Annahme wird getroffen, weil sie eine überschaubarere Darstellung gestattet. Ihre Relaxierung ist aber ohne technische Schwierigkeiten möglich und wird später vorgenommen.

10 Eine direkte Übertragung der im Zusammenhang mit der Bewertung deterministischer Zahlungsströme genutzten Argumentation ist dementsprechend nicht möglich. Beispielsweise wäre in (10) die Erzeugung eines Cashflows von null in der letzten Periode nur durch die Wahl von $z_{T-1} = -\frac{1}{q} X_T$ zu bewerkstelligen. Dann aber ist z_{T-1} eine Zufallsvariable und mithin die intertemporale Abhängigkeitsstruktur verändert.

11 Vertritt man, wie Schmidt/Terberger (1997), die Ansicht, der Kapitalwert dürfe keine stochastische Größe sein, so ist diese Interpretation selbstverständlich unzulässig. Deterministische Zahlungsströme werden durch u natürlich ebenfalls anhand ihrer (dann deterministischen) Kapitalwerte bewertet, die in diesem Fall mit den Sicherheitsäquivalenten gemäß (13) übereinstimmen.

12 Dieses Resultat kann auch als Begründung der Fisher-Separation für stochastische Zahlungsströme und beliebigem Planungshorizont aufgefasst werden.

13 Frühe Arbeiten zur Risikoanalyse sind zum Beispiel Hillier (1963), Hertz (1964) und Coenenberg (1970). Wird als Ergebnis einer Risikoanalyse die Verteilungsfunktion F (oder die komplementäre Verteilungsfunktion $1 - F$) des Kapitalwerts präsentiert, so dient die Methode primär dazu, das inhärente Risiko transparent zu machen. Vielfach wird allerdings, wie im vorliegenden Beitrag, eine Verdichtung zum Sicherheitsäquivalent vorgenommen, so beispielsweise in den neueren Arbeiten Buhl/Wirth (1993), Wirth (1996), S. 170 ff., Einsfeld (1998), S. 84, Reitwiesner (2001), S. 94, oder Huther (2003), S. 140 ff.

14 Dies ist im Allgemeinen *nicht* der Fall, vergleiche Abschnitt B.I.

15 Auch dies ist im Allgemeinen nicht der Fall.

16 Vergleiche hierzu auch die Ausführungen im IDW Standard „Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen" (IDW S 1), Textziffer 6.2., Randnummer 95.

17 Es sei darauf hingewiesen, dass sich diese beiden vordergründig ähnlich wirkenden Vorgehensweisen insbesondere im Hinblick auf die (Nicht-)Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen den Cashflows unterscheiden: Während die intertemporale Abhängigkeitsstruktur durch die Faltung im Rahmen von (13) in der Verteilung des stochastischen Kapitalwerts vollen Niederschlag findet, geht sie bei der Diskontierung von Cashflow-Sicherheitsäquivalenten verloren. Vergleiche hierzu auch die Ausführungen in Bamberg/Dorfleitner/Krapp (2004).

18 Kürsten (2002) beweist ein ähnliches Resultat, jedoch in einem spezielleren Kontext.

19 Vergleiche zum Beispiel Coenenberg (1970).

20 Die Formeln für μ und σ^2 bleiben natürlich auch ohne die Normalverteilungsannahme gültig, vergleiche Franke/Hax (1999), S. 253. Die exakte Verteilung des Kapitalwerts ist dann allerdings noch nicht bestimmt.

21 So etwa in Buhl/Wirth (1993), Wirth (1996), S. 170 ff., Einsfeld (1998), S. 84, Reitwiesner (2001), S. 94, oder Huther (2003), S. 140 ff.

22 Eine ausführlichere Diskussion der Problematik intertemporaler Abhängigkeiten in der Unternehmensbewertung findet der interessierte Leser bei Bamberg/Dorfleitner/Krapp (2004).

23 Vergleiche zum Beispiel Franke/Hax (1999).

Literatur

Bamberg, G. / Dorfleitner, G. / Krapp, M. (2004), Zur Bewertung risikobehafteter Zahlungsströme mit intertemporaler Abhängigkeitsstruktur, erscheint in: Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis 56

Berger, J. O. (1993): Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, 2. Auflage, New York et al.

Buhl, H. U. / Wirth, A. (1993): Outsourcing von Informationsverarbeitungsleistungen unter Risikoaspekten, in: Frisch, W. / Taudes, A. (Hrsg.): Informationswirtschaft: Aktuelle Entwicklungen und Perspektiven, Heidelberg, S. 207–230

Coenenberg, A. G. (1970), Unternehmensbewertung mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation, Zeitschrift für Betriebswirtschaft 40, S. 793–804

Courbage, Ch. (2002), On Bivariate Risk Aversion, Atlantic Economic Journal 30, S. 98

Debreu, G. (1954), Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Thrall, R. M. / Coombs, C. H. / Davis, R. L. (Hrsg.), Decision Processes, S. 159–165, New York et al.

Diedrich, R. (2003), Die Sicherheitsäquivalentmethode der Unternehmensbewertung: Ein (auch) entscheidungstheoretisch wohlbegründbares Verfahren, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55, S. 281–286

Einsfeld, U. (1998), Forschungskooperationen zwischen Universitäten und Unternehmungen, Wiesbaden

de Finetti, B. (1952), Sulla Preferibilità, Giornale degli Economisti e Annali di Economia 11, S. 685–709

Franke, G. / Hax, H. (1999), Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt, 4. Auflage, Berlin et al.

Haley, C. W. / Schall, L. D. (1979), The Theory of Financial Decisions, 2. Auflage, New York et al.

Hillier, F. S. (1963), The Derivation of Probabilistic Information for the Evaluation of Risky Investments, Management Science 10, S. 443–457

Hertz, D. B. (1964), Risk Analysis in Capital Investment, Havard Business Review 42, S. 95–106

Huther, A. (2003), Integriertes Chancen- und Risikomanagement, Wiesbaden

Institut der Wirtschaftsprüfer (Hrsg.) (2000), IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S 1), IDW-Fachnachrichten, S. 415–441

Kihlstrom, R. E. / Mirman, L. J. (1974), Risk Aversion with Many Commodities, Journal of Economic Theory 8, S. 361–388

Kruschwitz, L. / Löffler, A. (2003), Semi-subjektive Bewertung, Zeitschrift für Betriebswirtschaft 73, S. 1335–1345

Kürsten, W. (1992 a), Meßtheorie, Axiomatik und Bernoulli-Prinzip: Erwiderung zur Stellungnahme von Prof. Dr. Thomas Schildbach, Zeitschrift für Betriebswirtschaft 62, S. 485–488

Kürsten, W. (1992 b), Präferenzmessung, Kardinalität und sinnmachende Aussagen: Enttäuschung über die Kardinalität des Bernoulli-Nutzens, Zeitschrift für Betriebswirtschaft 62, S. 1459–477

Kürsten, W. (2002), „Unternehmensbewertung unter Unsicherheit“, oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent- und Risikozuschlagsmethode, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 54, S. 128–144

Kürsten, W. (2003), Grenzen und Reformbedarfe der Sicherheitsäquvalentmethode in der (traditionellen) Unternehmensbewertung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55, S. 306–314

Meyer, R. F. (1976), Preferences over Time, in: Keeney, R. L. / Raiffa, H., Decisions with Multiple Objectives, S. 473–514, New York et al.

Reitwiesner, B. (2001), Integrierte Rendite-/Risikosteuerung in der Industrieunternehmung: Betriebswirtschaftliche Konzeption und Umsetzung auf der Basis von Standardsoftware, Wiesbaden

Richard, S. F. (1975), Multivariate Risk Aversion, Utility Dependence and Separable Utility Functions, Management Science 21, S. 12–21

Schmidt, R. H. / Terberger, E. (1997), Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, 4. Auflage, Wiesbaden

Schwetzler, B. (2000 a), Stochastische Verknüpfung und implizite bzw. maximal zulässige Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung, Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis 52, S. 478–492

Schwetzler, B. (2000 b), Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 52, S. 469–486

Schwetzler, B. (2002), Das Ende des Ertragswertverfahrens?, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 54, S. 145–158

Wirth, A. (1996), Technologische und institutionelle Aspekte bei der Bereitstellung von Informationsverarbeitungsleistungen, Frankfurt am Main et al.

Wiese, J. (2003), Zur theoretischen Fundierung der Sicherheitsäquivalentmethode und des Begriffs der Risikoauflösung bei der Unternehmensbewertung, Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55, S. 287–305

Wilhelm, J. (2003), Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien – Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung, Diskussionsbeitrag B-10-03, Betriebswirtschaftliche Reihe der Wirtschaftswissenschaftlichen Fakultät der Universität Passau

Zusammenfassung

Zur Bewertung von Unternehmen beziehungsweise von risikobehafteten Zahlungsströmen gibt es im Wesentlichen vier Ansätze, nämlich erstens der rein individualistische Ansatz unter ausschließlicher Verwendung multiattributiver Risikonutzenfunktionen, zweitens hybride Ansätze, die den individualistischen Ansatz mit einem perfekten Geldmarkt zu verbinden suchen, drittens die CAPM-basierte Methodik und schließlich viertens der auf der no-arbitrage Bedingung aufbauende Ansatz im Rahmen eines reichhaltigen (perfekten und vollständigen) Kapitalmarkts. Die Arbeit beschäftigt sich mit einem wichtigen Aspekt des hybriden (semi-subjektiven, semi-objektiven, ...) Ansatzes. Bei Existenz eines perfekten Geldmarkts kann der zu bewertende Zahlungsstrom durch risikolose Anlage- beziehungsweise Verschuldungsaktivitäten transformiert werden; dabei bleibt die intertemporale Abhängigkeitsstruktur unberührt. Eine multiattributive Risikonutzenfunktion heißt *kapitalmarktkompatibel*, wenn das für Bewertungsfragen relevante Sicherheitsäquivalent gegenüber solchen Transformationen invariant ist. Die kapitalmarktkompatiblen Risikonutzenfunktionen werden vollständig charakterisiert. Ferner wird die entscheidungstheoretische Fundierung der so genannten Risikoanalyse geklärt.

Summary

There are several approaches to the valuation of risky streams: Firstly, the pure individualistic approach stemming from multiperiod (= multiattributed, multivariate) utility functions, secondly, the individualistic approach combined with the ingredients (risk-free rate) of a perfect money market, thirdly, CAPM-based approaches, and finally, the no-arbitrage valuation in the framework of perfect and complete capital markets. The paper deals with an important aspect of the second approach. A multiperiod utility function is called *consistent with the money market* if the (time zero) certainty equivalent is independent of (arbitrary but non-stochastic) borrowing and lending activities. The consistent utility functions are completely characterized. Moreover, the paper clarifies the theoretical underpinnings of so called risk analysis.

Valuation of customers in growth companies - a scenario based model

Manfred Krafft, Markus Rudolf, and Elisabeth Rudolf-Sipötz *

First version: August 2000
Final version: April 2004

Summary:

In this paper, we evaluate growth stocks by modelling a company´s customer equity. We start with the observation that the number of customers in successful start-ups increases very quickly (exponentially) in the first few years. Then, it converges towards an industry average. Contrarily, the number of clients in poorly performing start-ups goes rapidly down until bankruptcy occurs. These observations imply a "bathtub" shape of the probability distribution for the number of customers in the initial years, i.e. low probabilities for the number of clients being close to average but high probabilities for extreme realizations. The valuation procedure presented here is based on a binomial scenario tree technique for the number of clients and the cash flow generated by each client. It is shown that the model is able to explain higher company values than traditional net present value calculations. Furthermore and in contrast to traditional valuation models, increasing the volatility in the change of the number of customers increases the value of each customer.

Key Words: Bathtub distribution, bifurcation, Customer valuation, customer equity, mean reversion process, momentum process, real option, valuation, start-up, new technology

JEL classification: G3, M3

*Professor Dr. Manfred Krafft, Universität Münster, Email: mkrafft@uni-muenster.de; Professor Dr. Markus Rudolf (corresponding author), Wissenschaftliche Hochschule für Unternehmensführung WHU - Otto Beisheim Hochschule, Dresdner Bank Stiftungslehrstuhl für Finanzen, Burgplatz 2, D - 56179 Vallendar, Email: markus.rudolf@whu.edu; Dr. Elisabeth Rudolf-Sipötz, Finanznetzwerk für Deutschland e.V., Email: elisabeth.rudolf-sipoetz@web.de.

Valuation of customers in growth companies - a scenario based model[1]

Summary:

In this paper, we evaluate growth stocks by modelling a company´s customer equity. We start with the observation that the number of customers in successful start-ups increases very quickly (exponentially) in the first few years. Then, it converges towards an industry average. Contrarily, the number of clients in poorly performing start-ups goes rapidly down until bankruptcy occurs. These observations imply a "bathtub" shape of the probability distribution for the number of customers in the initial years, i.e. low probabilities for the number of clients being close to average but high probabilities for extreme realizations. The valuation procedure presented here is based on a binomial scenario tree technique for the number of clients and the cash flow generated by each client. It is shown that the model is able to explain higher company values than traditional net present value calculations. Furthermore and in contrast to traditional valuation models, increasing the volatility in the change of the number of customers increases the value of each customer.

Key Words: Bathtub distribution, bifurcation, Customer valuation, customer equity, mean reversion process, momentum process, real option, valuation, start-up, new technology

Schlüsselworte: "Badewannen"-Verteilung, Mean-Reversion-Prozess, Momentum-Prozess, Bifurkation, Kundenbewertung, Kundenwert, Realoption, Bewertung, Gründungsunternehmen, neue Technologien

JEL classification: G3, M3

[1] Two anonymous referees of this journal have contributed with valuable comments. The authors thank the participants of a workshop at the European Business School in Oestrich Winkel in April 2001, as well as Sönke Albers, Peter Jost, Otto Loistl, and Peter Witt for their comments.

1 Introduction

The valuation of internet companies or of companies belonging to the so called "new economy" sector is frequently considered as to be related to the number of customers. For instance, MLP, a German financial services DAX company, revealed a market value of 21.000 € per customer in July 2001[2]. Obviously, it is very unlikely that the net present value of each MLP account is as high as 21.000 €. However, the value of a customer is based on his lifetime value as well as indirect economic return from influencing other prospective or current customers[3]. Thus, the existing customer might generate additional customers. This phenomenon is called "positive feedback"[4] or "network externalities"[5], or "(positive) word of mouth"[6]. For example, the online retailer CDnow considers the reference value of existing clients as its most powerful source for acquiring new customers[7]. On the other hand, it is also possible that dissatisfied customers influence the relationship of other clients to the company in a negative way[8]. Both phenomena are more frequently observed for growth companies like internet start-ups[9] than for "old economy" companies. In a study of the industrial goods sector, a significant correlation between customer satisfaction and customer acquisition is reported[10], which the authors interpret as a positive external effect.

In a different study in the mobile phone market[11], it is demonstrated that there is a direct link between the willingness of a customer to recommend the business and the number of new accounts. In recent years, a paradigm shift in management research was observed: the interests of the marketer and the company's shareholders are more precisely aligned. Nowadays, marketing practices are generally considered as investment decisions and as such should be evaluated on financial grounds[12]. As a result, customers are no longer viewed as objects of marketing actions, but rather as assets (so called

---

[2] See *FAZ* (2001).
[3] See *Blattberg / Thomas* (1998, p. 362).
[4] See *Shapiro / Varian* (1998).
[5] See *Katz / Shapiro* (1985).
[6] See *Rust / Zahorik / Keiningham* (1995), pp. 59; *Reichheld* (1996), p. 48; *Reichheld / Sasser* (1990).
[7] See *Hoffman / Novak* (2000), p. 186.
[8] Negative external effects, see for instance *Richins* (1983). E.g., *Jones / Sasser* (1995) identify "terrorists": these are customers who utilize every opportunity to convert others by expressing their dissatisfaction with their supplier (see *Jones / Sasser* (1995), pp. 91.).
[9] See for instance *Hoffman / Novak* (2000).
[10] *Kordupleski / Rust / Zahorik* (1993).
[11] *Danaher / Rust* (1996).
[12] See *Hansotia / Wang* (1997), p. 8.

market-based assets)[13]. Furthermore, since they frequently have negative profits, traditional methods of company valuation cannot be adopted to the new economy. Therefore, management and analysts are forced to look for alternative concepts. The customer equity approach, by which a firm is evaluated by its potential to generate cash flow from both its current and future customer base, seems to be a promising concept for determining the market value of growth companies. For example, a significant proportion of the market value of amazon.com is assigned to customers who are intangible off-balance sheet assets. Dorsch and Carlson define the customer equity as the value of tangible and intangible resources that retailers invest in a particular customer[14]. As such, the concept of customer equity is not necessarily restricted to companies in the new economy. Indeed, "market-to-book" ratios for the Fortune 500 companies are approximately 3.5, which suggests that more than 77% of their market value result from intangible assets [15]. In the literature, the concepts for estimating the value of the customer base are net present value calculations. To a large extent, they concentrate on the customer retention (attrition) and the customer migration model[16]. These models result from the categorization of industrial buyers corresponding to the two poles of direct marketing relationships: "lost-for-good" and "always-a-share" customers[17]. The lifetime value of customers is derived from the present value of the expected benefits (e.g. gross margins) less the burdens[18]. In the customer retention model[19], the change in the number of customers is described by retention rates, which are calculated from cohorts of past customers.

In a similar way, Jackson[20] outlines the lifetime value analysis at an insurance company. He investigates other account management issues in greater detail and shows how policy upgrades and cross selling can increase the lifetime value. In Dwyer´s migration model, the customers are classified in recency cells. From past data the purchase probability of each cell is estimated. At the expiration of each period, purchasers move up into the next recency cell, whereas nonpurchasers come into the next "older" recency cell[21]. Thus, the migration model allows to describe the customer flow at a more so-

[13] See for instance *Srivastava / Shervani / Fahey* (1998); *Blattberg / Deighton* (1996).
[14] See *Dorsch / Carlson* (1996).
[15] See also *Srivastava / Shervani / Fahey* (1998), p. 4.
[16] See *Dwyer* (1997).
[17] See *Jackson* (1985).
[18] E.g. direct costs of servicing and communicating from customers; see *Dwyer* (1997), p. 7.
[19] See *Dwyer* (1997), p. 10.
[20] *Jackson* (1989*a*); *Jackson* (1989*b*); *Jackson* (1989*c*).
[21] See *Dwyer* (1997), p. 12.

phisticated level. However, a constant annual margin is assumed and effects arising from the current customers, such as cross selling and referrals, are not considered at all. Schmittlein, Morrison, and Colombo focus on the same information for predicting the development of the customer base[22]. They provide stochastic modelling procedures for determining two of the inputs to a profitability analysis - whether a customer is still active (recency) and what future purchase behavior can be expected (frequency). Regarding company valuation, the development of the (current and future) customer base is the main issue, whereas from the marketing view the conceptualization of lifetime value of customers is important because managing the antecedents of customer lifetime value (CLV) will become central to the data-driven world. Magazine publishers, book clubs and insurance companies were among the earliest progenitors of CLV calculations. Up to this day it lacks a standard algorithm due to the complexity of the (marketing) environment. For example, changes in product mix affect the CLV but are not considered in current models. Furthermore, the approaches available altogether neglect external effects[23]. Recently, Burmann analyzes problems of applying CLV models in dynamic market environments[24]. Cornelsen takes a shareholder value perspective on customer value[25]. According to him, marketing efforts should concentrate on high value customers and not on any customer in order to maximize the customer equity. His approach regards the reference potential in addition to the expected cash flows associated to a particular customer as an important source of the customer value.

This paper suggests a model, where positive and negative external effects arising from the current customer base are regarded. It suggests a new type of stochastic process which allows to model positive and negative "snowball" effects implying that a considerable customer base generates a growing number of new customers and a poor customer base reduces the number of customers rapidly. Or, as Shapiro and Varian[26] point out: "Positive feedback makes the strong grow stronger ... and the weak grow weaker." We call the stochastic process which models this property a "momentum process". In finance, "mean reversion processes" are used for the characterization of the stochastic behavior of interest rates. They are exactly the inversion of a momentum process. In order to implement the model we assume that the net cash flow generated by each customer changes over time depending on the state of the nature. It is assumed that the net cash flow is perfectly correlated

[22] See *Schmittlein / Morrison / Colombo* (1987).
[23] See *Berger / Nasr* (1998), pp. 28.
[24] See *Burmann* (2003).
[25] See *Cornelsen* (2000).
[26] *Shapiro / Varian* (1998), p. 178.

with the number of clients. That is, successful internet companies will be able to convince the growing number of customers to generate increasing cash flows every year and poor performing internet companies will have to suffer a declining number of clients with declining cash flows for each customer. It is shown that the model suggested here is more powerful to explain higher company values than the classical net present value model. The structure of the paper is as follows. The next section 2 introduces the model. Section 3 contains a binomial tree implementation of the model. Section 4 contains the valuation model for customer equity based on the process of the number of customers developed in section 3. It is shown that investing in a new technology start-up implies investing in a real option which becomes more valuable the riskier the business is. In section 5, issues concerning the probability distributions and the volatility for the number of customers are discussed. The last section 6 provides conclusions of the paper and implications for future research.

2 The model

Shapiro and Varian[27] show that the number of customers in prosperous new technology companies, especially in internet based companies, increases dramatically in the first few years of the existence. Then, a retardation of the growth rate is observed. The upper line in *figure 1* illustrates the situation. The number of clients is assumed to start with 200. It quickly increases exponentially up to 320 and remains constant as soon as a critical mass of customers is achieved. Then a "new economy company" becomes an "old economy company". On the other hand, if the start-up is not successful, the poorly performing company looses customers with exponential speed (see lower line in *figure 1*). This phenomenon, known as "positive feedback" or "increasing rate of return", clarifies that the number of customers in the future is one of the core figures for the valuation of today's customer base when one intends to estimate the economic value of internet start-up companies. However, the speed of the growth rate is not predictable, i.e. it is a stochastic variable.

figure 1 close to here

We want to clarify this phenomenon by the following example: The two most common internet browsers are the Netscape Communicator and the

[27] See *Shapiro / Varian* (1998), p. 175.

Internet Explorer. Between 1996 and 2002, the Microsoft Explorer experienced increasing growth rates neutralizing the penetration of the market by the Netscape browser almost completely. In 1996, Netscape was almost monopolist on the internet browser market. Microsoft got ahead of Netscape for the first time in the year 1999. Since the end of the year 2001, we observe a decreasing growth speed for the Explorer which is due to an almost 100% saturation of the market. Hence, between 1996 and 2000, a sustainable dispersion of the customer bases of the two suppliers took place. This is illustrated in *figure 2*.

figure 2 close to here

The model in this section allows describing this property of the customer growth rate. We model the change in the number of customers as a momentum process where the number of clients starts with an initial level of K_0 and then diverges from a pre-specified critical level $\bar{K}$ in both directions. If the initial number of clients K_0 is below the critical level $\bar{K}$ ($K_0 = 60$ and $\bar{K} = 100$ in *figure 1*), then the number of clients decreases dramatically in the first three years and then remains constant on a very low level. However, if the initial number of clients is above the critical level of 100 clients, then the number of clients increases up to 320 customers which is reached after three periods. Then, the number of clients again remains constant.

Mean reversion processes are very common in finance for modelling interest rate changes[28]. One of the main properties of mean reversion processes is that the underlying stochastic variable has a tendency towards the critical level. This is due to the fact that for financial market variables it is considered to be very unlikely that large deviations from a typical level in interest rates can be preserved for a long time. The setting in our model is the opposite. We assume a tendency away from the critical (mean) level and model positive feedback phenomena based on a momentum process. Let dz be a standard Wiener process, and $a < 0$ be the momentum speed, i.e. the speed with which the change in the number of customers evolves.

$$dK = a \cdot \left[\bar{K} - K(t)\right] \cdot dt + \sigma(t) \cdot dz(t) \qquad a < 0 \tag{1}$$

Equation (1) indicates a divergence between the critical number of customers $\bar{K}$ and the current number of customers $K(t)$ which is the faster, the more negative the speed factor a is. Since $dz(t)$ has mean 0, the expected

[28] See e.g. *Neftci* (2000), p. 270.

change in the number of customers is $E(dK) = a \cdot \left[\bar{K} - K(t)\right] \cdot dt$. The stochastic component of this process specified in (1) depends on the random variable $dz(t)$ and the volatility σ of the change in the number of clients. The process in equation (1) is similar to usual mean reversion processes except that $a < 0$ causes a momentum effect rather than a mean reversion effect. Implementing the process in a discrete-time binomial grid is done according to the methodology described in Hull´s textbook[29]. The next section transfers this methodology to client bases of companies.

3 Binomial tree implementation

For a discrete time implementation of model (1), Hull uses a two-stage trinomial tree procedure for modelling changes in interest rates. For the purposes addressed here, a one-stage binomial model is sufficient. This is due to the fact that

- unlike in Hull´s description the critical customer level $\bar{K}$ is constant over time[30], therefore one stage is sufficient, and
- the expected change, but not the volatility in the change, of the number of customers[31]. is parameterized. This implies that only two branches are needed in each node.

Such a model implies that each state is followed by two possible nodes. In the up-state-node the change in the number of customers is positive while the change in the down-state-node is negative. According to Hull´s description, the selection of the jump width depends on the volatility in the change of the number of customers[32] of the particular business which is analyzed.

For illustrative purposes, assume that the initial number of customers is $K_0 = 100$. The change in the number of customers in each node is either 80 or -80. The critical number of customers is assumed to be $\bar{K} = 100$. Furthermore, each node called (t, j)[33] in the binomial grid is characterized by the time t and state j. K_j is the number of clients in each state j (K_0: initial number of customers, k: jump width depending on the volatility in

[29] See *Hull* (2003), pp. 552-556.
[30] See *Hull* (2003), p. 553.
[31] Unlike in Hull´s (2003) description; see p. 554.
[32] Hull defines the spacing between interest rates as $\sigma \cdot \sqrt{3\Delta t}$, see p. 553.
[33] j is a positive or negative integer.

the number of customers):

$$K_j = K_0 + k \cdot j = \begin{cases} K_{j-1} + k \\ K_{j+1} - k \end{cases} \tag{2}$$

Equation (2) is a simple procedure implying that the number of customers is either increased by k or decreased by k in each node. Based on equation (2), *figure 3* illustrates the process for the number of customers for four periods. Equation (2) implies that the initial state in period 0 is 0. An up-move is modelled by an increase of the state variable j by 1; a down-move decreases the value of the state variable by 1. The realizations of the state variables j can be found in the last column of *figure 3*. The binomial tree depicted in *figure 3* is called a recombining tree which is due to the fact that an up-move followed by a down-move yields the same outcome as a down-move followed by an up-move. The numbers of clients in the states -2, -3, -4 of the periods 2, 3, 4 are negative which is of course not an appropriate description of the reality. However, those negative numbers will be used later in order to indicate that the company obviously went bankrupt in these states. The maximum number of clients in period 4 is 420 which implies that each initial customer generates 3.2 additional customers in period 4. The tree in *figure 3* contains the positive feedback property because up-state probabilities are the higher the bigger the current customer base is and the lower, the smaller the current number of clients is. This reflects the properties implied by *figure 1*.

figure 3 close to here

According to Hull [34], the probabilities are chosen to match the expected change of the customer base K_j[35] according to the process specified in (1). Let π_j be the probability for an up-move in state j. In order to avoid negative probabilities, the set of possible states j has to be restricted[36]. Define L as the maximum state and $-L$ as the minimum state, then matching the drift in equation (1) requires:

$$\begin{array}{lrcl} \text{For } |j| \leq L: & & & a \cdot \left(\bar{K} - K_j\right) \\ & & = & \pi_j \cdot (K_{j+1} - K_j) + (1 - \pi_j) \cdot (K_{j-1} - K_j) \\ & & = & \pi_j \cdot k - (1 - \pi_j) \cdot k \\ \text{For } |j| > L: & \pi_j & = & 0.5 \end{array} \tag{3}$$

[34] See *Hull* (2003), p. 553, last paragraph.

[35] *Hull* (2003) additionally matches the variance of the change. However, this is not needed here which implies that a binomial instead of a trinomial tree is sufficient here.

[36] See *Hull* (2003), p. 553.

If the state variable j exceeds the maximum state, we limit the state to both sides by L and $-L$. Hull limits the states by changing the branching technique. In our case however, *figure 1* implies that a growth company turns to a regular company after some initial years. Therefore, unlike Hull, we have to give up the momentum process for the customer base and switch to a Geometric Brownian motion[37]. Therefore, we set $\pi_j = 0.5$ for $|j| > L$ instead of changing the branching technique. From equation (3) for $|j| \leq L$, we obtain a state but not time dependent probability:

$$\pi_j = \frac{a \cdot \left(\bar{K} - K_j\right) - \left(K_{j-1} - K_j\right)}{K_{j+1} - K_{j-1}} = \frac{a \cdot \left(\bar{K} - K_j\right) + k}{2 \cdot k} \tag{4}$$

Substituting K_j by $K_0 + k \cdot j$ according to equation (2) provides the following simplification:

$$\pi_j = \frac{a}{2k} \cdot \left(\bar{K} - K_0\right) + \frac{1 - a \cdot j}{2} \tag{5}$$

Imagine that the growth company invents a new product and is able to motivate a considerable number of customers to try the new product out. Whether the new product is successful however will become obvious as time goes by. This implies that a successful product will quickly generate new customers. However, if the new product is a failure, there will be many customers testing the product only once. K goes then quickly down. For illustrative purposes we can assume that $\bar{K} = K_0$, i.e. the initial number of customers is equal to the critical number of customers. Assuming this implies for the up-state probability π_j:

$$\pi_j = \frac{1 - a \cdot j}{2}, \text{ which implies } \pi_j = \frac{1}{2} \text{ for } a = 0 \tag{6}$$

The probability setting in equations (5) and (6) make sure that the number of clients is expected to rise if there are many customers and that the customer base is expected to go down if there is a poor installed base[38]. It is based on the linear (arithmetic) specification of the change in the number of customers in equation (2). A factor representation for the change in the number of clients would of course have been possible as well. In this case, the probabilities π_j in equation (4) would be determined differently from equation (6), but still under the condition that the expected change

[37] This implies new momentum effects as soon as the customer level gets back into the critical range for states between $-L$ and L. Avoiding such behavior would be straightforward if equation (7) would be modified in such a way that $\pi_j = 0.5$ is required for periods after $t = 1/a$.

[38] The importance of valuable installed bases is described by *Farrell / Saloner* (1986).

in the number of clients equals the drift of the momentum process, i.e. $E(dK) = a \cdot \left(\bar{K} - K(t)\right) dt$. However, the derivation of π_j consistent with a factor representation of dK would be more complicated without leading to further insights.

The last problem which has to be addressed is the question of how to select the constant L appropriately. It must be made sure that the probability π_j is non-negative or never greater than one. This can be achieved by limiting the maximum and minimum state:

$$\begin{aligned} 0 \leq \pi_j \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1 - a \cdot j}{2} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} \leq j \leq -\frac{1}{a} \text{ for } a < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Based on (7) we can define $L \equiv -1/a$. For $\bar{K} \neq K_0$, equation 7 would be obtained accordingly. *Figure 3* contains the probabilities in each node. The figure is based on $a = -0.4$ which implies that $L = 2.5$. Hence, states greater than 2 or smaller than -2 require to set $a = 0$. This is the case for the probabilities in the states 3, 4, -3, and -4. Consider for instance state 3 in period 3: The number of clients is 340, the change in the number of clients is either 80 or -80, both with probability 0.5. Hence, the expected change in the number of clients is 0 which is achieved by setting $a = 0$. On the other hand, in state $j = -1$ and period $t = 1$, we have 20 customers which is substantially below the critical number of clients $\bar{K} = 100$. Therefore, the probability for a positive growth is only 0.3 whereas the probability for a further decline in the number of clients is 0.7. The expected change in the customer base is -32. Finally, in state 2 of period 2 we have 260 clients which implies that the company has been extraordinarily successful in the last two periods. Due to the positive external effects, the number of clients in that particular node is expected to increase. We have a 0.9 probability for 80 additional clients but only a 0.1 probability for loosing 80 clients. Hence, the expected change in the number of clients is

$$0.9 \cdot 80 - 0.1 \cdot 80 = 64 = a \cdot (100 - 260) = -0.4 \cdot (-160) = 64$$

Results according to the calculations above are obtained for each node in *figure 3*. Obviously the binomial model fits the process specified in equation (1). Hence, the shape of the function in *figure 1* reflecting the process for the number of customers can be modelled by the binomial process in *figure 3*.

4 Valuation of customers

The value of each customer today depends on both, the unknown number of customers after a certain time horizon (as a measure of the indirect economic return)[39], and the cash flow that each customer generates (direct economic return). We assume that one customer generates an annual net cash flow of 1 € today. The annual cash flow of each customer increases according to the growth rate factor g in the subsequent periods if the start-up provides an excellent performance. However, if the company performs poorly, it will loose clients. This requires the company to generate new customers at additional expenses. Therefore, the net cash flow per customer is assumed to go down according to the growth rate factor g. Let C_j be the cash flow generated by each customer in state j of any period and C_0 be the initial cash flow generated by all initial customers:

$$C_j = C_0 \cdot (1 + g)^j \tag{8}$$

Hence, the higher the state j, that is the more successful the company acts, the higher the annual cash flow generated by each customer will be. The lower the state j, the lower the cash flow will be. This is due to the assumption that the net cash flow is reduced if the company has to pay additional expenses for new customers. Furthermore, the efficiency in dealing with existing customers is expected to be greater than with generating new customers[40]. Also Blattberg and Deighton state[41] that it is easier and more efficient to retain existing customers than to acquire new ones[42]. This results from the fact that retention costs are lower compared to the costs of winning customers. Equation (8) therefore assumes that additional marketing expenses are required in the low states. *Figure 4* shows the cash flow generated by each client in every period, if the initial cash flow C_0 is 1 and the factor determining the annual cash flow growth is $g = 5\%$.

figure 4 close to here

Both *figures 3* and *4* provide a total cash flow which is generated by all existing customers in each period. However, no bankruptcy condition has been imposed yet. Subsequently, it is assumed that a company having less than $X = 10$ customers gets bankrupt. Therefore, the modelled number of

[39] This is also called the referral potential or the referral value of the relationship.
[40] See *Rust / Zahorik / Keiningham* (1995), p. 59.
[41] See *Blattberg / Deighton* (1996).
[42] See *Blattberg / Deighton* (1996), pp. 136-142; *Sheth / Parvatiyar* (1995), p. 265.

customers given in *figure 3* has to be modified. *Figure 5* shows the number of customers if the bankruptcy condition is implemented. Due to bankruptcy in the states $j = -2$, $j = -3$, and $j = -4$, the number of clients from *figure 3* has to be adjusted. If the number of customers K_j falls below the critical level of $X = 10$, the company is assumed to go bankrupt and K_j is therefore set to 0. Particularly of course, this holds if $K_j < 0$. The value of customers is obtained by multiplying the cash flows generated by each customer given in *figure 4* by the number of customers in *figure 5*. *Figure 6* contains the cash flows generated in each period by all customers. In the last period which is considered here, i.e. period 4, the maximum cash flow generated by all customers is 510.5 €. This is due to two effects: Firstly, the number of customers has significantly increased up to 420 (see *figure 5*). Secondly, the cash flow of each customer is by 21.55% higher than in the initial period. *Figure 6* shows different paths from today until period 4. Each node on the paths shows the possible net cash flow generated by all customers. Hence, *figure 6* provides five different scenarios for period 4 and the time before. Of course, the number of time steps can easily be extended. Please note that *figure 6* implies a stochastic behavior of the growth in the cash flows over time although the growth rate factor g has been set constant in equation (8). Therefore, this customer valuation model accords to company valuation models with unpredictable earnings growth rates. Ballwieser presents a valuation model with an unpredictable growth rate occurring in only one period and subject to an infinite time horizon[43]. However, we extend this approach by letting the growth rate factor g follow a stochastic process with time- and state-dependent realizations.

The main components for the valuation of customers have been derived now. The final step requires to calculate the expected present value of all customers based on the scenarios given in *figure 5*. Therefore, we have to assume a risk adjusted discount rate r [44]. How to select the discount rate appropriately is comprehensively discussed in standard finance textbooks[45]. The risk adjusted discount rate is the higher the more systematic risk the business takes. It is always higher than the risk-less rate of interest. For the numerical example considered here, we assume $r = 10\%$. Today's value of the customers is obtained by applying a recursive procedure. Let C_j represent the cash flow generated by each customer in state j according to equation (8). Furthermore, remember that K_j is the number of customers. Then starting

[43] See *Ballwieser* (1988).
[44] Alternatively, one could select a risk neutral valuation measure. A discussion of these two alternatives can be found below.
[45] See e.g. *Brealey / Myers* (2003), pp. 242.

in the last period, the value $V_j(t)$ of all customers in state j and period t is:

$$V_j(t) = \frac{\pi_j \cdot V_{j+1}(t+1) + (1-\pi_j) \cdot V_{j-1}(t+1)}{1+r} + C_j \cdot K_j \tag{9}$$

Assuming $r = 10\%$ is a very simple assumption. Alternatively, one could adopt the methodology of Schwartz and Moon as well as of Keiber, Kronimus, and Rudolf[46] where expectations are built under a risk neutral Martingale measure. This allows to choose the risk-free rate as the discount rate. However, this requires to adjust the drift of the process in equation (1) by the market price of risk of the customer growth rate. Keiber, Kronimus, and Rudolf estimate different market prices of risk. While this is possible for financial figures, there is no comparable market data available for the customer base. Therefore, changing the valuation measure to a risk neutral measure according to Girsanov´s theorem can hardly be adopted to the customer value model presented here.

The customer values in the last period T of the tree ($T = 4$ in *figures 3* to *7*) are initialized with

$$V_j(t) = C_j \cdot K_j \tag{10}$$

figure 6 close to here

Equation (9) expresses the value of all customers in state j as the expected value of all customers in the subsequent period discounted by 1 plus the risk adjusted discount rate and by adding the cash flow $C_j \cdot K_j$ in the current node. For instance, the value of all customers in period 3 and state 1 is:

$$V_1(3) = \frac{0.7 \cdot 286.7 + (1-0.7) \cdot 100}{1.1} + 189 = 398.70$$

This can be recursively continued until the value $V_0(0)$ of all customers today is obtained. The value of the complete customer base is called the customer equity[47]. *Figure 7* shows the result of this recursive procedure. It turns out that the value of the customer equity is 541.8 **€**. This implies that the average value of each customer today ($K_0 = 100$) is 5.42 **€**. This result can be compared to the classical net present value model which states that the value of one customer equals the sum of the present values of the expected

[46] See *Schwartz / Moon* (2001) and *Keiber / Kronimus / Rudolf* (2002).
[47] See *Blattberg / Deighton* (1996) or *Rust / Lemon / Zeithaml* (2001).

Table 1: Sensitivity of the value of one customer due to different variations in the model

Jump width k ($g = 0.05$, $a = -0.4$)	Customer value in €	Growth rate g ($k = 80$, $a = -0.4$)	Customer value in €	Speed a ($k = 80$, $g = 0.05$)	Customer value in €
k = 20	4.31	g = 5%	5.42	a = 0.0	4.81
k = 40	4.51	g = 10%	5.85	a = -0.1	4.98
k = 60	4.92	g = 15%	6.33	a = -0.2	5.19
k = 80	5.42	g = 20%	6.84	a = -0.3	5.43
k = 100	5.51	g = 30%	7.98	a = -0.5	5.59
k = 200	8.41	g = 60%	12.58	a = -1.0	6.55

cash flows in each period[48]. The expected continuously compounded growth rate in the cash flows according to *figure 4* is 0 in every period. Therefore, the expected cash flow per customer is 1 € per period which provides a net present value of:

$$NPV = 1 + \frac{1}{1.1} + \frac{1}{1.1^2} + \frac{1}{1.1^3} + \frac{1}{1.1^4} = 4.2 \text{ €} \tag{11}$$

Hence, the value of a customer according to the classical NPV model is substantially below the value identified by the scenario model. The scenario model uses more information of the cash flow probability distribution than classical NPV models typically use. A classical NPV analysis would concentrate on the expected cash flows under the assumption that the cash flow distribution is symmetrical. The scenario analysis presented here however allows us to incorporate a bankruptcy condition which generates an asymmetric cash flow distribution. Moreover, the specification of a stochastic process for the number of clients as in equation (1) can be incorporated into the scenario model. This allows us to evaluate also indirect cash flows caused by the reference potentials of each customer. The scenario model is therefore much more flexible than the NPV model and the results are more reliable.

Table 1 shows the sensitivity of the value of a customer if the parameters of the model are varied. The bigger the jump size (k) is, the higher the value of the customer will be. The jump width k is related to the volatility in the number of clients. As a result, growth companies are more valuable, the riskier their business is, which is in contrast to classical valuation results. This is due to the fact that there is an asymmetric success potential: If the expected number of customers can be increased, the cash flow generated

[48] See for instance *Dwyer* (1997); *Jackson* (1989*a*); *Jackson* (1989*b*); *Jackson* (1989*c*); *Rust / Lemon / Zeithaml* (2001).

increases exponentially. However, if the number of clients decreases, the start-up entrepreneur will only loose the capital he has invested and the capital of venture capitalists and other equity holders. The equity holders of new technology start-ups have so called real options which are the more valuable, the more risk the entrepreneur takes[49]. A similar argument holds for the sensitivity analysis of the speed factor (a) which expresses the speed of divergence for the number of clients. The faster the number of clients diverges from the critical value $\bar{K}$, the more valuable is each client. Finally, it is obvious that the customer value is positively related to growth rate factor g to which the cash flow accord over time.

5 Volatility and probability distribution for the number of clients

The last paragraph analyzes both, the volatility of the changes in the number of clients and the probability distribution for the number of clients. The probability distribution is analyzed first. *Figure 1* indicates a tendency that after a certain number of periods, the number of clients is either far above the critical value $\bar{K}$ or substantially below $\bar{K}$. This should be reflected by a special shape of the probability distribution where realizations around the mean are less likely than extreme observations. We call this probability distribution bathtub shape. This property of the probability distribution accords to an observation which is quite common in chaos theory. Loistl and Betz and also Loistl[50] report very similar probability distributions and call it the bifurcation phenomenon. Bifurcation according to chaos theory describes that the probability distribution is split-up into two distinct distributions. Transferred to our case, one distribution would characterize the successful growth company while the other one is due to a poor performance of the company. This section shows under which conditions the probability distribution for the number of customers is bathtub-shaped. *Figure 9* illustrates six different probability distributions for different divergence speed factors a. *Figure 8* is based on $a = -0.3$. We observe a bathtub-shaped probability distribution. However, for $a = 0$, the probability distribution is of a different shape. This is due to the fact that assuming $a = 0$ implies a normal probability distribution for the number of clients. *Figure 9* shows furthermore that the probability distribution has two maximums if $a < -0.4$ is assumed. This is

[49] See *Trigeorgis* (1996), for a recent application of this idea to customer valuation see *Levett et. al.* (1999).

[50] See *Loistl / Betz* (1996), p. 31.; *Loistl* (1994), p. 370.

due to equation (6) where $\pi_j = 0.5$ is assumed when j is smaller or greater than L respectively $-L$. The interval within which the probability can be calculated without regarding the state variable is the smaller the smaller a is. Hence, it is possible to construct a bathtub probability distribution if the divergence speed a is selected accordingly.

figure 8 close to here

figure 9 close to here

figure 10 picks one probability distribution from *figure 8* where $a = -0.3$. This distribution reveals the formerly discussed bathtub shape. However, one weakness of that representation is that it refers to a duration of only four periods. Therefore, the second probability distribution in *figure 10* refers to the number of customers after 14 periods. Again we observe two maximums which is due to the following effects. The low probabilities around the mean of the probability distribution arise from the momentum property. The low probabilities for the very left and the very right end of the distribution are caused by the neutralization of the momentum property for states greater than 3 or less than -3. Finally, comparatively high probabilities are observed for the number of clients being around 50 and around 150. Again, this reflects the split-up of the probability distribution and accords to bifurcation.

Implementing the model in practice would require to select the parameters of the process for the number of customers appropriately. More specifically, the model would have to be calibrated on observed data. *Figure 10* illustrates that a bathtub shape of the probability distribution for a time horizon of 4 years requires to set $a = -0.3$. The same choice of a does however not generate the same bathtub shape for a 15 years time horizon.

The second consideration of this paragraph refers to the volatility of the change in the number of customers in each node. The scenario model introduced here is based on a binomial path because each node is followed by two subsequent nodes. Since each branch can be represented by one equation, we can meet two restrictions in a binomial model. Firstly, we required that the pre-specified expected change in the number of clients is met and secondly, that the sum of the probabilities is 1. That was implemented by equations (4) to (7). However, many stochastic models have a third requirement referring to the volatility of the underlying stochastic process. In order to satisfy such a requirement, a trinomial model would have to be used instead of a binomial model[51]. However, in order to achieve a bathtub-shaped probability

[51] See for instance *Hull / White* (1994*a*).

distribution which is consistent with *figure 1*, a binomial model instead of a trinomial model is sufficient. The probability distribution in *figure 8* implies a high degree of uncertainty (volatility) in the change of the number of clients if K is close to the critical level $\bar{K}$ and a higher volatility, if K is far above or below $\bar{K}$. *Figure 11* shows the expected change $E(\Delta K)$ and the up-state respectively the down-state probabilities in each node. Since the realized change is either k or $-k$, the volatility follows directly from *figure 11*. The volatility process is depicted in *figure 12*. *Figure 12* shows that the volatility is state dependent. The closer the number of clients is to the critical level $\bar{K}$, the higher the volatility will be. This is due to the fact that after a while, it gets clear whether a specific growth company is going to be successful or not. Hence, the degree of uncertainty lowers as soon as either considerable customer base has been acquired or as it gets likely that the customers will not accept the service. Therefore, the specification of the volatility as state dependent (but not time dependent) matches the characteristics of many growth stocks. An exception are the states 3 and -3 in *figure 12*. According to equation (7), this is due to the fact that the dispersion factor a is set to 0. Therefore, in states exceeding 3 or being below -3, the volatility is like in state 0 and equals k.

figure 11 close to here

6 Conclusion

This paper focusses on growth firms' installed customer base and how information about the size and evolution of this installed base can be utilized to evaluate the firms' overall value. Business practice teaches us that evaluations of such companies very often are based on the current and expected size of the installed base. However, traditional concepts to evaluate firms (e.g., the NPV model) are not capable to explain the values of fast growing companies. It rather seems more adequate to treat the evolvement of a start-up's installed base as a real option. Therefore, we take a different view in our paper. The growth of the number of customers cannot be forecasted with certainty, but follows a stochastic process. We model this in our contribution based on a mean reversion process with negative mean reversion speed (momentum process). The resulting bathtub function of high probabilities for the realization of either extremely small or large installed bases in future models the phenomena of positive feedbacks, network externalities, and increasing rates of return. This means, we are able to model increasing gains and losses of the installed base of companies, a phenomenon that especially can be observed in extremely dynamic markets such as for internet start-ups. Our model also covers the case that start-ups after some time either will run bankrupt or reach an upper limit of the installed base. The approach presented here is more powerful to explain actual start-up evaluations than traditional concepts such as the NPV approach.

The implications of our paper for business practices are as follows. Our model emphasizes the importance of building a large customer base. It is even rational to burn money for achieving a fast growth of the installed base that is substantially larger than the growth rate of competitors and the critical size of the installed base K. In other words, it can be rational to forget about a company's NPV and cash flow management for a while. By this, we verify the common wisdom for internet start-ups that they rather are competing *for* markets, not competing *in* markets. As soon as a company reaches the maximum installed base, it should change this strategy to well established long-term objectives such as maximization of profits. Venture capitalists, business angels, shareholders, entrepreneurs etc. learn from our analytical approach that companies in growing markets in the start-up period should focus on fast growth of the size of the firms' installed customer base. To the best of our knowledge, while this is in accordance to common sense and actual business practice, it never has been shown analytically. This paper clarifies the importance of new companies' installed customer base. However, some work still has to be done. Especially, our analytical results have to be investigated empirically. From our point of view, both in-depth case studies and large-scale empirical investigations could fulfill this need. We also report in our manuscript that the determination of K and a as well as the calibration of k on the empirical volatility σ (i.e., the change in the number of clients) are critical issues. Future research should concentrate on approaches how these parameters can be estimated adequately. Alternatively, an equilibrium model implying the growth in the customer base of all competitors might provide additional insights. Furthermore, the model can be extended to a 2-factor-model with the discount rate as the second stochastic factor. If an Ornstein-Uhlenbeck process for the discount rate would be assumed, this extension could be handled by a two-factor-model such as the Hull and White[52] model. We are looking forward to seeing both empirical and analytical papers that cover these and similar issues addressed in our manuscript.

[52] See *Hull / White* (1994*b*).

References

Ballwieser, Wolfgang (1988), Unternehmensbewertung bei unsicherer Geldentwertung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Vol. 40 (9), pp. 798–812.

Berger, Paul D. / Nasr, Nada I. (1998), Customer Lifetime Value: Marketing Models and Applications, in: Journal of Interactive Marketing, Vol. 12 (Winter), pp. 17–30.

Blattberg, Robert C. / Deighton, John (1996), Manage Marketing by the Customer Equity Test, in: Harvard Business Review, Vol. 74 (July/August), pp. 136–144.

Blattberg, Robert C. / Thomas, Jacquelyn S. (1998), The Fundamentals of Customer Equity Management, in: M. Bruhn and Christian Homburg (eds.), Handbuch Kundenbindungsmanagement, Wiesbaden, 329-357.

Brealey, Richard A. / Myers, Stewart C. (2003), Principles of Corporate Finance, 7th ed., McGraw-Hill.

Burmann, Christoph (2003), Customer Equity als Steuerungsgröße für die Unternehmensführung, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 73 (2), pp. 113–138.

Cornelsen, Jens (2000), Kundenwertanalysen im Beziehungsmarketing, GIM-Verlag.

Danaher, Peter J. / Rust, Roland T. (1996), Indirect Financial Benefits from Service Quality, in: Quality Management Journal, Vol. 3 (2), pp. 63–75.

Dorsch, Michael J. / Carlson, Les (1996), A Transaction Approach to Unterstanding and Managing Customer Equity, in: Journal of Business Research, Vol. 35, pp. 253–264.

Dwyer, F. Robert (1997), Customer Lifetime Valuation to Support Marketing Decision Making, in: Journal of Direct Marketing, Vol. 4 (Fall), pp. 8–15.

Farrell, Joseph / Saloner, Garth (1986), Installed Base and Compatibility: Innovation, Product Preannouncement, and Predation, in: American Economic Review, Vol. 76 (4), pp. 940–955.

FAZ (2001), Frankfurter Allgemeine Zeitung, July 24, 31.

Hansotia, Behram J. / Wang, Paul (1997), Analytical challenges in customer acquisition, in: Journal of Interactive Marketing, Vol. 11 (Spring), pp. 7–19.

Hoffman, Donna L. / Novak, Thomas P. (2000), How to Acquire Customers on the Web, in: Harvard Business Review, Vol. 78 (May-June), pp. 179–188.

Hull, John C. (2003), Options, Futures, and other Derivatives, 5 ed., Pearson Education Inc.

Hull, John / White, Allan (1994*a*), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single-Factor Models, in: Journal of Derivatives, Vol. 2, pp. 7–16.

Hull, John / White, Allan (1994*b*), Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models II: Two-Factor Models, in: Journal of Derivatives, Vol. 2, pp. 37–48.

Jackson, Barbara B. (1985), Build Customer Relationships that Last, in: Harvard Business Review, Vol. 63 (November-December), pp. 120–128.

Jackson, Donald (1989*a*), Determining a Customer's Lifetime Value, in: Direct Marketing, Vol. 52 (March), pp. 60–62.

Jackson, Donald (1989*b*), Determining a Customer's Lifetime Value, in: Direct Marketing, Vol. 52 (May), pp. 24–32.

Jackson, Donald (1989*c*), Determining a Customer's Lifetime Value, in: Direct Marketing, Vol. 52 (August), pp. 28–30.

Jones, Thomas O. / Sasser, W. Earl (1995), Why Satisfied Customers Defect, in: Harvard Business Review, Vol. 73 (November-December), pp. 88–99.

Katz, Michael L. / Shapiro, Carl (1985), Network Externalities, Competition, and Compatibility, in: American Economic Review, Vol. 75 (3), pp. 424–440.

Keiber, Karl / Kronimus, André / Rudolf, Markus (2002), Bewertung von Wachstumsunternehmen am Neuen Markt, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Vol. 72 (7), pp. 735–764.

Kordupleski, Raymond E. / Rust, Roland T. / Zahorik, Anthony J. (1993), Why Improving Quality doesn't Improve Quality, in: California Management Review, Vol. 35 (Spring), pp. 82–95.

Levett, Peter / Page, Michael / Nel, Deon / Pitt, Leyland / Berthon, Pierre / Money, Arthur (1999), Towards an application of option pricing theory in the valuation of customer relationships, in: Journal of Strategic Marketing, Vol. 7, pp. 275–284.

Loistl, Otto (1994), Kapitalmarkttheorie, 3 ed., Oldenbourg Verlag.

Loistl, Otto / Betz, Iro (1996), Chaostheorie, 3 ed., Oldenbourg Verlag.

Neftci, Salih N. (2000), An introduction to the mathematics of financial derivatives, 2nd ed., Academic press.

Reichheld, Frederick F. (1996), The Loyalty Effect, The Free Press.

Reichheld, Frederick F. / Sasser, W. Earl (1990), Zero Defections: Quality Comes to Services, in: Harvard Business Review, Vol. 68 (September-October), pp. 105–111.

Richins, Marsha L. (1983), Negative Word-of-Mouth by Dissatisfied Consumers: A Pilot Study, in: Journal of Marketing, Vol. 47 (Winter), pp. 68–78.

Rust, Roland T. / Lemon, Katherine N. / Zeithaml, Valerie A. (2001), Driving Customer Equity: Linking Customer Lifetime Value to Strategic Marketing Decisions.

Rust, Roland T. / Zahorik, Anthony J. / Keiningham, Timothy L. (1995), Return on Quality (ROQ): Making Service Quality Financially Accountable, in: Journal of Marketing, Vol. 59 (April), pp. 58–70.

Schmittlein, David C. / Morrison, Donald G. / Colombo, Richard (1987), Counting Your Customers: Who Are They and What Will They Do Next?, in: Management Science, Vol. 33 (January), pp. 1–24.

Schwartz, Eduardo S. / Moon, Mark (2001), Rational Pricing of Internet Companies Revisited, in: Financial Review, Vol. 36, pp. 7–26.

Shapiro, Carl / Varian, Hal R. (1998), Information Rules: A Strategic Guide to the Network Economy, Harvard Business School Press.

Sheth, J.N. / Parvatiyar, A. (1995), Relationship Marketing in Consumer Markets: Antecedents and Consequences, in: Journal of the Academy of Marketing Science, Vol. 23, pp. 255–271.

Srivastava, Rajendra K. / Shervani, Tasadduq A. / Fahey, Liam (1998), Market-Based Assets and Shareholder Value: A Framework for Analysis, in: Journal of Marketing, Vol. 62 (January), pp. 2–18.

Trigeorgis, Lenos (1996), Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation, MIT Press.

Figure 1: Expected number of clients according to Shapiro and Varian (1998, p. 177).

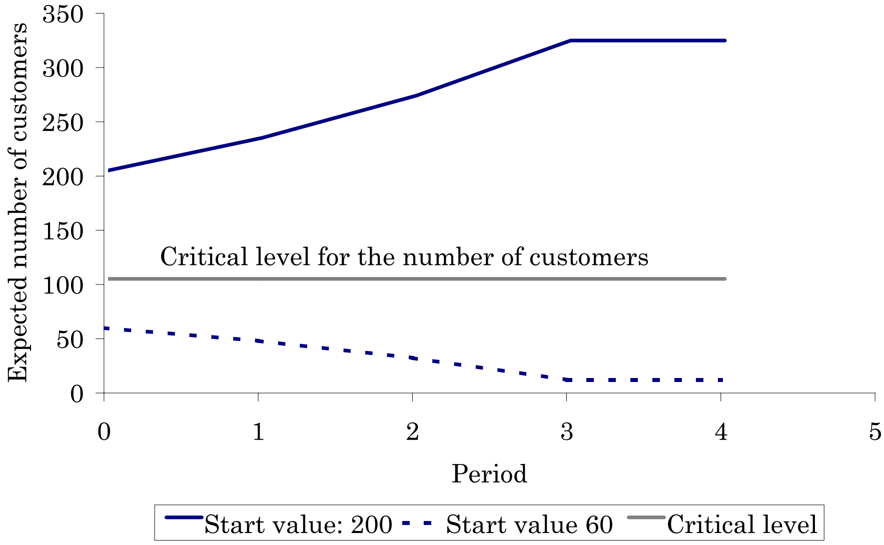


Figure 2: Market shares of Netscape and Microsoft Explorer .

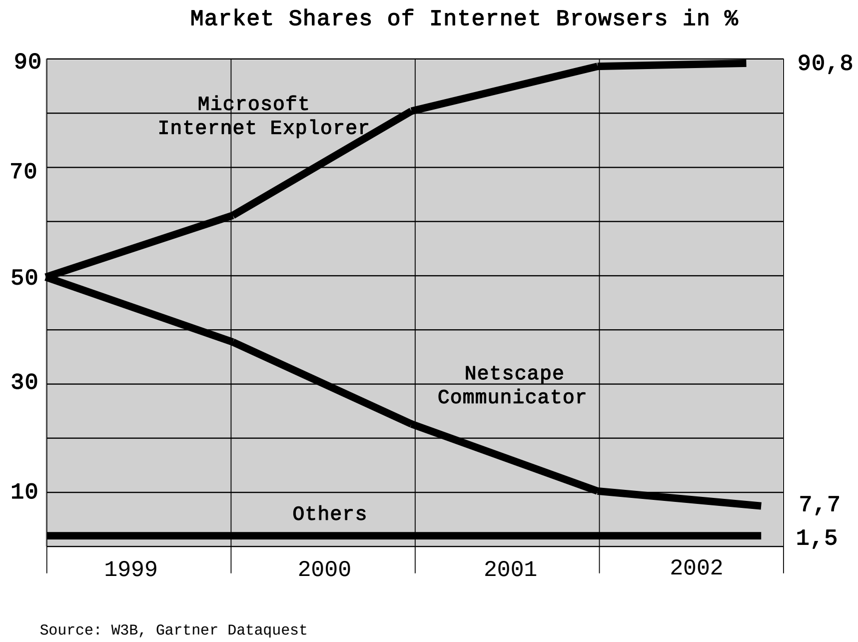


Figure 3: Binomial model for the number of customers - jump width $k = 80$, start value $K_0 = 100$, speed factor $a = -0.4$, critical number of customers $\bar{K} = 100$.

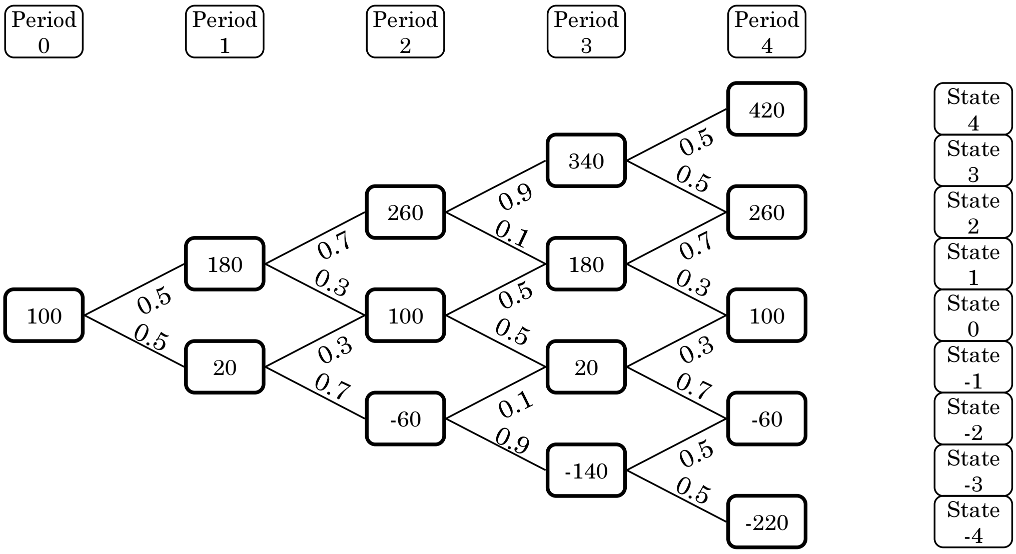


Figure 4: Cash flow generated in each period by each individual customer - annual growth rate $g = 5\%$, initial cash flow per customer is $C_0 = 1$ €.

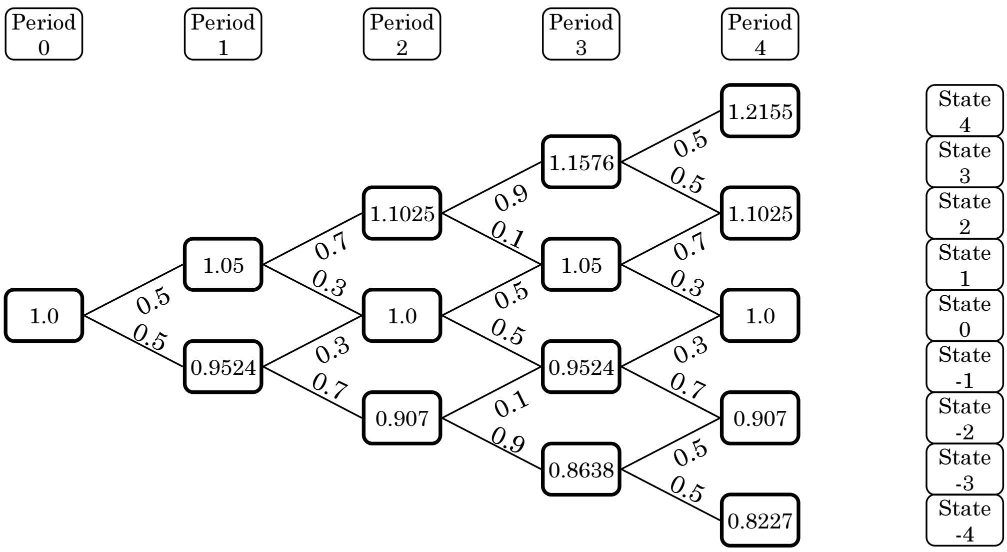


Figure 5: Binomial process for the number of customers if a bankruptcy condition is implemented - jump width $k = 80$, start value $K_0 = 100$, speed factor $a = -0.4$, minimum number of clients $X = 10$.

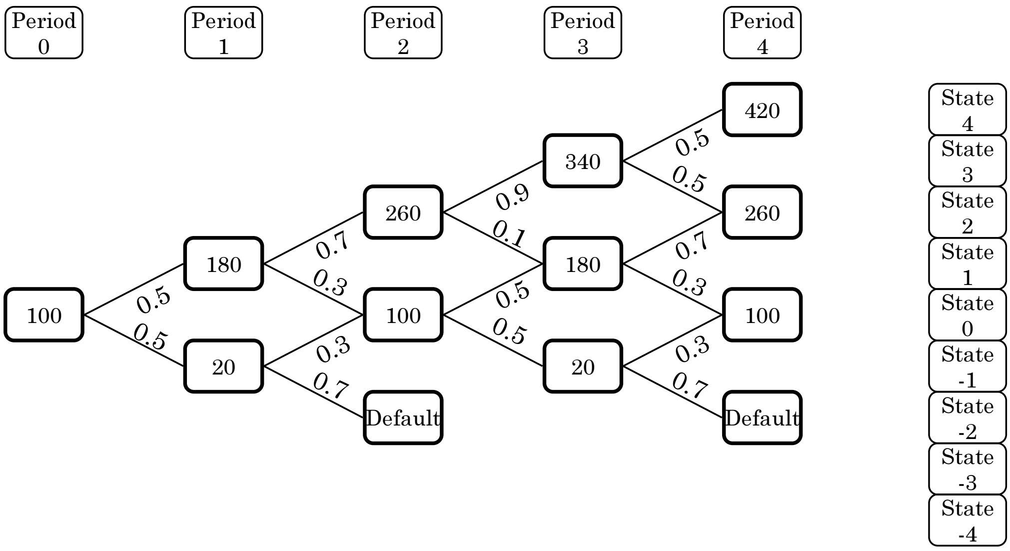


Figure 6: The cash flows generated by all customers.

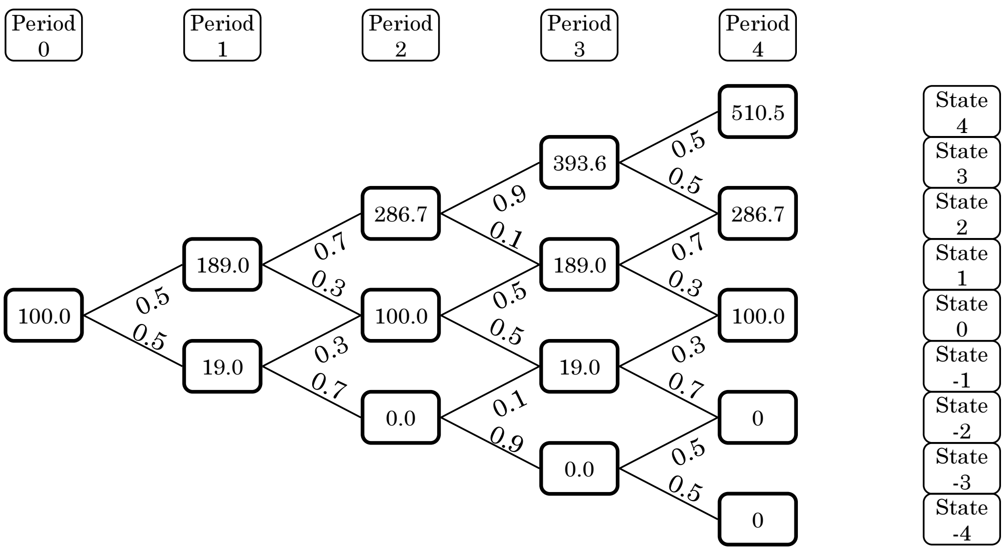


Figure 7: Recursive valuation of customer equity - risk adjusted discount rate r=10%.

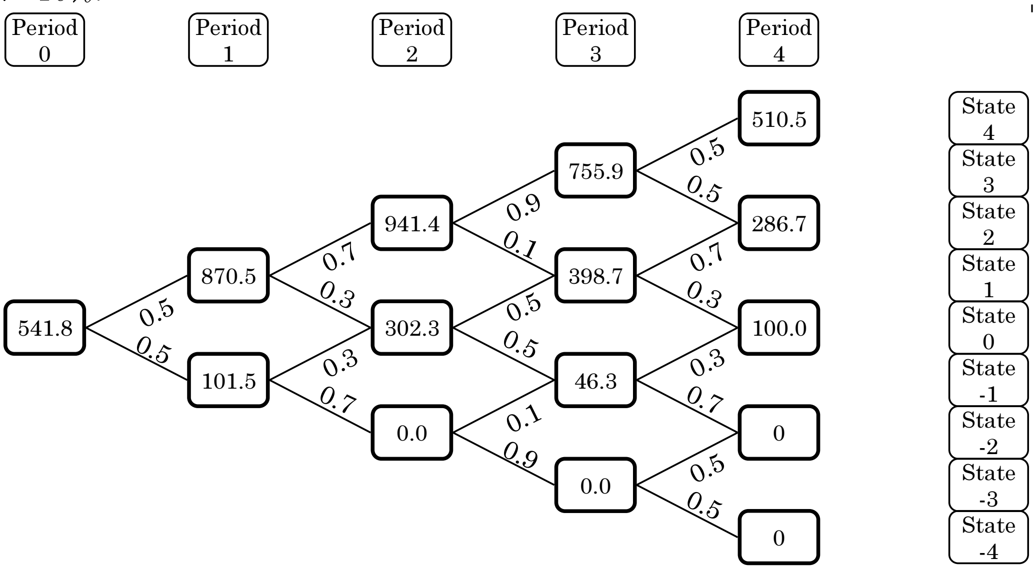


Figure 8: Probability distribution in period 4 for the number of clients if $a = -0.3$, $k = 40$, $K_0 = 100$, and $\bar{K} = 100$.

Figure 9: Various probability distributions for the number of clients in period 4 given various speed factors if $k = 40$, $K_0 = 100$, and $\bar{K} = 100$.

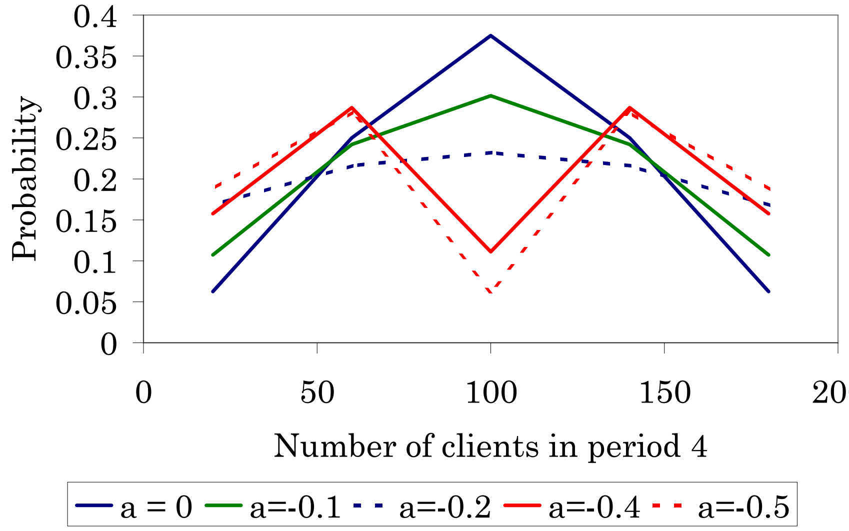


Figure 10: Probability distributions for the number of clients in periods 4 and 15 if $a = -0.3$, $k = 40$, $K_0 = 100$, and $\bar{K} = 100$.

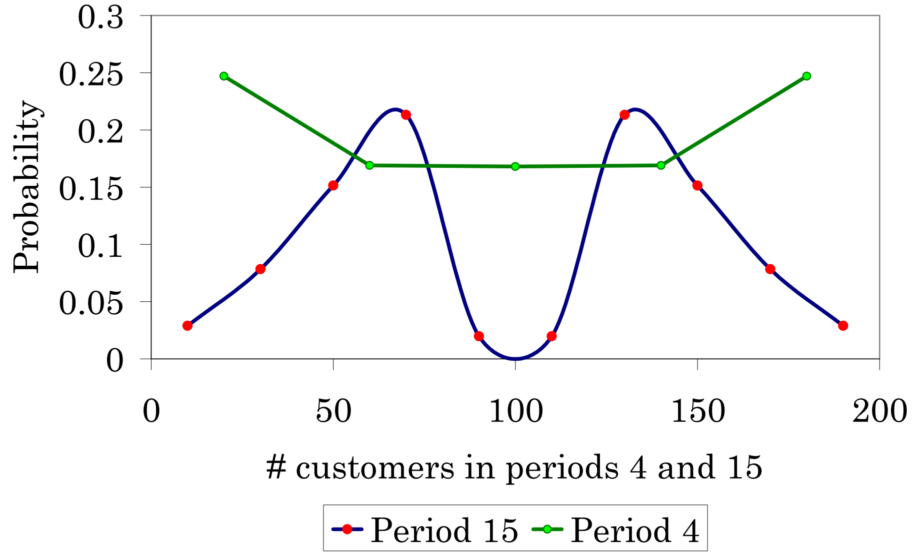


Figure 11: Expected change in the number of clients in each state.

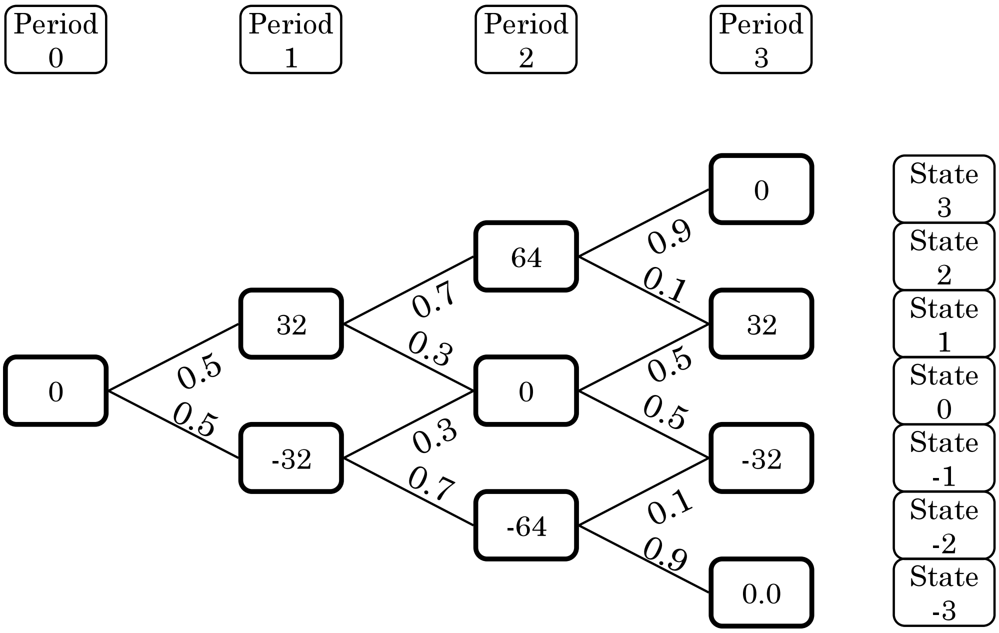
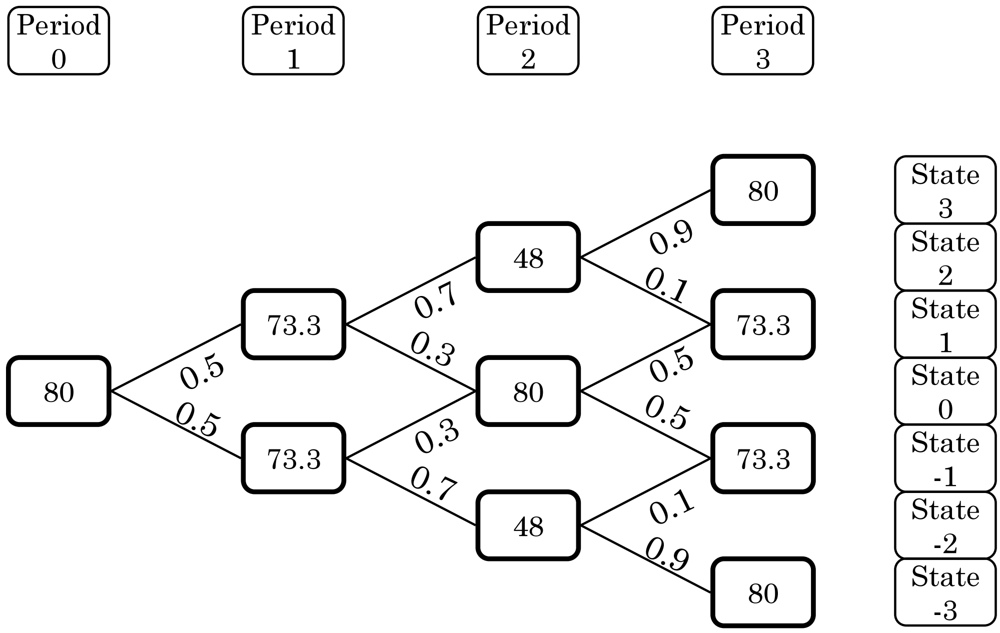


Figure 12: Volatility of the change in the number of clients in each state.



Wolfgang Ballwieser*

Das Residualgewinnmodell für Zwecke der Unternehmensbewertung (Stand: 11.6.04)

I. Problemstellung

Für Zwecke der Unternehmensbewertung kennt man die Methoden der Gesamtbewertung, wozu die Ertragswertmethode und die Varianten des Discounted Cash Flow zählen, und – in praxi beliebt – Überschlagsrechnungen mit Hilfe von Multiplikatoren oder Zuschlägen auf die Börsenkapitalisierung[1]. In jüngerer Zeit hat sich die Literatur auch intensiv mit einem Ansatz auseinandergesetzt, der als Residual Income Model (RIM) bezeichnet wird[2].

Nach diesem Modell ergibt sich der Unternehmenswert als Summe des buchmäßigen Eigenkapitals zum Bewertungszeitpunkt und des Barwerts der Residualgewinne. Der Residualgewinn ist als Überschuß des Buchgewinns über die Kapitalkosten definiert.

Diesem Modell, das in der Literatur seit langem bekannt ist[3], aber erst in jüngerer Zeit eine neue Blüte im Zusammenhang mit der Wertsteigerungsanalyse erfahren konnte[4], werden gegenüber den klassischen Verfahren der Gesamtbewertung Vorteile zugesprochen. Danach ist mit ihm sowohl die Bewertung ganzer Unternehmen als auch der Werthaltigkeitstest des Goodwill aus Kapitalkonsolidierung, wie er nach SFAS 141 und 142[5] sowie IFRS 3 geboten ist, besser vorzunehmen, als wenn man die traditionellen Verfahren verwenden würde.

Der Beitrag stellt das Residual Income Model bei sicheren und bei unsicheren Erwartungen vor, skizziert die in der Literatur zugesprochenen Vorteile für die Bewertung von Unternehmen und die Durchführung von Werthaltigkeitstests und würdigt sie anschließend. Auf die vermeintlichen Vorteile der Methode für die Wertsteigerungsanalyse wird nicht eingegangen.

---

* Prof. Dr. Dr. h.c. Wolfgang Ballwieser, Seminar für Rechnungswesen und Prüfung, Fakultät für Betriebswirtschaft, Ludwig-Maximilians-Universität München.
[1] Vgl. zum Überblick und zu Details Ballwieser (2004).
[2] Vgl. insb. Coenenberg/Schultze (2002) und (2003); Prokop (2004).
[3] Vgl. Bromwich/Walker (1998) im Zusammenhang mit der Leistungsbeurteilung.
[4] Vgl. insb. Stewart (1991); Hebertinger (2002).
[5] Vgl. insb. Pellens/Sellhorn (2001).

II. Residualgewinnmodell bei sicheren Erwartungen

1. Darstellung

Gilt das Kongruenzprinzip[6], wonach die Summe sämtlicher Periodenerfolge eines Unternehmens dem Totalgewinn aus der gesamten Unternehmenstätigkeit entspricht, so folgt unter der Annahme sicherer Erwartungen und der Zugrundelegung einer Berechnung des Ertragswerts die Beziehung[7]:

(1) $$UW = EW = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_t}{(1+i)^t} = EK_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{R_t}{(1+i)^t} = EK_0 + \sum_{t=1}^{T} \frac{G_t - i \cdot EK_{t-1}}{(1+i)^t} = EK_0 + GW$$

mit

UW	=	Unternehmenswert,
EW	=	Ertragswert,
GW	=	Goodwill,
E_t	=	Ertrag (Mittelzufluß des Eigentümers) in Periode t,
R_t	=	Residualgewinn in Periode t,
G_t	=	buchhalterischer Gewinn in Periode t,
EK_0	=	Buchwert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t = 0,
EK_{t-1}	=	Buchwert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t-1,
i	=	periodenunabhängiger Zinsfuß.

Der Unternehmenswert ergibt sich also nicht nur durch Diskontierung der Erträge, sondern auch dadurch, daß auf den Buchwert des Eigenkapitals in t = 0 der Barwert der Residualgewinne R_t addiert wird, wobei der Residualgewinn in Periode t definiert ist als buchhalterischer Gewinn G_t abzüglich Kapitalverzinsung $i \cdot EK_{t-1}$. Hierbei ist es unerheblich, wie die Bilanzie-

[6] In der englischsprachigen Literatur ist von der clean surplus relation oder dem clean surplus accounting die Rede. Vgl. Ohlson (1995, S. 666); Feltham/Ohlson (1995, S. 694).

[7] In Deutschland verbindet man das mit dem Lücke-Theorem, in den angelsächsischen Ländern mit den Namen Preinreich, Edwards/Bell, Solomons und Peasnell. Vgl. Lücke (1955, S. 313-316); Preinreich (1938); Edwards/Bell (1961); Solomons (1965) und Peasnell (1982, S. 362-367). Auf Preinreich und Lücke verweisen auch Bromwich/Walker (1998, S. 394). Zu Recht stellen Bromwich/Walker (1998, S. 394) fest: "This important finding has been regularly rediscovered."

rungsregeln im einzelnen gestaltet sind; es muß nur das Kongruenzprinzip eingehalten sein[8]. Der Barwert der Residualgewinne entspricht zugleich dem Goodwill[9].

2. Charakterisierung als Mischverfahren

Man kann das Residualgewinnmodell als ein Mischverfahren (auch als Kombinationsverfahren geläufig), genauer: als ein Übergewinnverfahren klassifizieren[10]. Die Mischverfahren mischen Substanz- und Ertragswert, oder allgemeiner: Werte aufgrund von Einzel- und Gesamtbewertung. Geht man vom Ertragswert aus, bestimmt sich nach ihnen der Unternehmenswert gemäß der Gleichung[11]

(2) $UW = SW + b \cdot (EW - SW)$

mit

SW = Substanzwert,
b = Parameter, der unterschiedliche Werte > 0 annehmen kann.

Da die Differenz aus Ertragswert und Substanzwert auch als (originärer) Goodwill oder Geschäftswert bezeichnet wird, ergibt sich der Unternehmenswert auch als

(3) $UW = SW + b \cdot GW.$

Für $b = 1$ folgt

(4) $UW = SW + (EW - SW) = EW.$

Für $b = i \cdot n$ folgt

[8] Tatsächlich wird hiergegen in so gut wie allen Rechnungslegungssystemen verstoßen. Erfolgsneutral werden z.B. oft die Auswirkungen aus der Fremdwährungsumrechnung gebucht; andere Beispiele sind Aufwertungen bestimmter Wertpapiere über die Anschaffungskosten hinaus. Vgl. auch Ordelheide (1998, S. 512-515).
[9] Vgl. auch Ohlson (1995, S. 669); Bromwich/Walker (1998, S. 396).
[10] Vgl. zu den Mischverfahren Moxter (1983, S. 56-73); Ballwieser (2004, S. �).
[11] Vgl. Moxter (1983, S. 58), mit $b = n \cdot i$; Jacob (1960, S. 134).

(5) $UW = SW + i \cdot n \cdot (EW - SW)$

mit

n = Laufzeit in Jahren.

Berücksichtigt man die Beziehung aus dem unendlichen Rentenmodell

(6) $EW = \frac{E}{i} \Leftrightarrow E = EW \cdot i$,

folgt

(7) $UW = SW + n \cdot (E - SW \cdot i)$.

Danach ergibt sich der Unternehmenswert als Substanzwert zuzüglich einer endlichen Zahl n von Übergewinnen. Der Übergewinn ist definiert als Ertrag abzüglich Substanzwertverzinsung. Letztere stellt nach alter Bewertungstheorie den Normalgewinn dar[12].

Gleichung (7) beschreibt eine Bewertung mit undiskontierten Übergewinnen, die auf den Substanzwert addiert werden. Verfeinerungen sind möglich, indem eine Diskontierung der Übergewinne erfolgt[13]:

(8) $UW = SW + Rbf(n,i) \cdot (E - SW \cdot i)$.

mit

Rbf(n,i) = Rentenbarwertfaktor in Abhängigkeit von Laufzeit n und Zinssatz i.

Hierbei ist $b = i \cdot Rbf(n,i)$.

Vergleichen wir Gleichung (8) mit Gleichung (1), so handelt es sich bei Gleichung (1) ebenfalls um ein Übergewinnverfahren[14], und damit ein Mischverfahren, weil der Ausgangswert

[12] Vgl. insb. Moxter (1983, S. 56).

eine buchhalterische Größe ist (jetzt der Buchwert des Eigenkapitals anstelle des Substanzwerts; er kann grundsätzlich dem Substanzwert entsprechen), auf die ein abgezinster Übergewinn (jetzt als Residualgewinn bezeichnet) addiert wird[15]. Zwar geht Gleichung (1), anders als Gleichung (8), nicht von einer unendlichen Rente und zeitvariablen Eigenkapitalgrößen aus, aber dieser Unterschied ist für die konzeptionelle Einordnung unmaßgeblich.

3. Vermeintliche Vorteile

Für die Ertragswertmethode wird heute regelmäßig eine Variante des Phasenmodells verwendet, wonach die Erträge für die erste Phase periodengenau geschätzt werden, während für die zweite Phase eine vereinfachende Annahme, wie konstante Erträge oder konstant wachsende Erträge, unterstellt wird. Der Ertragswert ergibt sich dann als Barwert der Erträge der ersten Phase zuzüglich des Barwerts des Fortführungswerts am Ende der ersten Phase. Der Fortführungswert stellt selbst wieder einen Barwert dar, und zwar den der konstanten oder konstant wachsenden Erträge. Der Barwert des Fortführungswerts hat regelmäßig einen großen Anteil am Unternehmenswert, was insofern als problematisch erscheint, als die zweite Phase weit entfernt vom Bewertungszeitpunkt liegt und die ihr zugrunde liegenden Erträge demgemäß nur schlecht zu prognostizieren sind.

Dem Residualgewinnverfahren werden in diesem Zusammenhang folgende Vorteile zugesprochen:

(1) Soweit die Residualgewinnberechnung im Phasenmodell eine Fortschreibung der Verhältnisse des letzten Planjahres in die Zukunft unterstelle, sei die Frage zu klären, welche strategischen Wettbewerbsvorteile es einem Unternehmen auf ewig erlauben würden, die absoluten Kapitalkosten übersteigende Gewinne zu erwirtschaften; die Antwort schaffe Transparenz über den Fortführungswert[16].

(2) Da wesentliche Teile des Unternehmenswerts aus dem sicheren Buchwert des Eigenkapitals resultierten, würde die Problematik der Bestimmung des Fortführungswerts am Ende

---

[13] Vgl. Moxter (1983, S. 57).

[14] Eine "gewisse Ähnlichkeit" entdeckt schon Fickert (1985, S. 146).

[15] A.A. Coenenberg/Schultze (2003, S. 120 f.); Coenenberg/Schultze (2002, S. 606), jeweils mit der Begründung, daß die Höhe der zum Barwert der Residualgewinne addierten Bestandsgröße irrelevant sei. Die Aussage über die Irrelevanz der Höhe der Bestandsgröße trifft zwar zu, ändert aber nichts daran, daß man das Verfahren als Übergewinnverfahren kennzeichnen kann.

des expliziten Planungshorizonts entschärft. Der Fortführungswert hat bei der Residualgewinnberechnung einen geringeren prozentualen Anteil am Unternehmenswert als beim Ertragswertverfahren[17].

(3) Zwar sei das Residualgewinnverfahren mit den Mischverfahren nah verwandt, es unterliege aber nicht den ihnen entgegengehaltenen Kritikpunkten[18], weil die Substanzgröße für die Bewertung irrelevant sei; "allein die prognostizierten Zukunftserfolge determinieren den Wert."[19]

Schließlich diene die Residualgewinnmethode auch der internen Steuerung, beispielsweise mit Hilfe des Economic Value Added (EVA)[20], und verbinde wertorientierte Planung und wertorientierte Kontrolle[21]. Darüber hinaus könne das Modell für empirische Untersuchungen über den statistischen Zusammenhang von Aktienkurs und Eigenkapital sowie erwartetem Gewinn genutzt werden[22].

4. Würdigung

Wenn das Residualgewinnmodell dazu beiträgt, sich über die relative Wettbewerbsposition des zu bewertenden Unternehmens intensiv Gedanken zu machen und den Zeitraum abzuschätzen, "bis zu dem der Vorteil – und damit die Überrendite – durch die Wettbewerbskräfte erodiert ist"[23], erfüllt es eine nützliche Funktion. Aber es ist unklar, weshalb man Gedanken zur Wettbewerbsposition nur beim Residualgewinnmodell anstellen soll; sie sind Grundlage einer jeden Ertragsprognose. Das Residualgewinnmodell erschwert sogar die Prüfung, ob die Kapitalkosten gedeckt sind, weil diese absolut gemessen werden und vom bilanzierten eingesetzten Kapital abhängig sind. Das folgende, von *Schultze* entlehnte Beispiel[24] verdeutlicht dies:

---

[16] Vgl. Coenenberg/Schultze (2002, S. 607-609); Coenenberg/Schultze (2003, S. 124); Schultze (2003b, S. 462).
[17] Vgl. Schultze (2003b, S. 462).
[18] Vgl. hierzu insb. Moxter (1983, S. 41-73).
[19] Schultze (2003b, S. 464).
[20] Vgl. insb. Stewart (1991); Hebertinger (2002, S. 128-160).
[21] Vgl. Coenenberg/Schultze (2002, S. 617).
[22] Vgl. Schultze (2003b, S. 462): Es erweist "sich aus empirischer Sicht als das Modell, das kapitalmarktorientierte Unternehmenswerte am besten erklärt." Grundlegend Ohlson (1995) und Feltham/Ohlson (1995).
[23] Schultze (2003b, S. 464).
[24] Vgl. Schultze (2003b, S. 463), der freilich die gegenteilige Schlußfolgerung aus dem Beispiel zieht.

Auf eine Investition von 1.000 folgen annahmegemäß unendlich lange Rückflüsse von 120. Die Kapitalkosten betragen 10 %. Der Barwert des Projekts ist 1.200 (= 120 / 0,10). Er ergibt sich auch aus dem Eigenkapital von 1.000 und dem Barwert der Residualgewinne von 200 (= (120 - 1.000·0,10) / 0,10 = 20 / 0,10).

Wenn die Investitionskosten nicht voll aktiviert werden können, wie dies z.B. in Deutschland bei selbstgeschaffenem immateriellen Anlagevermögen wegen § 248 Abs. 2 HGB gegeben ist, sinkt das bilanziell eingesetzte Eigenkapital unter 1.000. Es betrage annahmegemäß 800. Dann steigen die Residualgewinne auf 40 (120 - 800·0,10). Der Unternehmenswert ist unverändert 1.200. Er ergibt sich auch aus dem Eigenkapital von 800 und dem Barwert der Residualgewinne von 400 (= 40 / 0,10).

Wie ist nun die Wettbewerbssituation des Unternehmens einzuschätzen? Erwirtschaftet es Über- oder Residualgewinne von 20 oder von 40 pro Jahr? Je konservativer es bilanzieren muß, um so größer sind die Übergewinne (im Beispiel 40 statt 20) und um so bedrohter erscheint möglicherweise langfristig die Wettbewerbsposition, weil Konkurrenten angelockt werden und die Übergewinne erodieren lassen. Kann es auf die Bilanzierung ankommen, wie die Wettbewerbssituation ist? Streng genommen nicht, weil die Bilanzierung Verhältnisse nach bestimmten Regeln abbildet, aber nicht schafft[25].

Nun läßt sich einwenden, es sei verfehlt, auf die absoluten Übergewinne abzustellen (40 oder 20). Maßstab sei allein die Differenz zwischen Kapitalkosten (10 %) und Unternehmensrendite (120 / 1.000 = 12 %). Es sei zu prüfen, ob sie unendlich lange gelte.

Der Einwand ist unbeachtlich: Glaubt man die Prognose von 120 für einen unendlich langen Zeitraum, so ist das Prüfungsergebnis trivial. Die Rendite aus dem Unternehmen übersteigt unendlich lange die Kapitalkosten. Glaubt man die Prognose aufgrund erneuter Reflexion hingegen nicht, so ändert sich die Rendite. Ob man sie glaubt oder nicht, hat aber nichts mit den berechneten Residualgewinnen zu tun, sondern mit der Schätzung der Erträge.

Das leitet über zu dem zweiten unterstellten Vorteil. Die vermeintliche Sicherheit bei der Ermittlung des bilanziellen Eigenkapitals EK_0 und der geringe Anteil des Barwerts der gesamten

[25] Vgl. auch Moxter (1983, S. 45-49), zur Kritik an der Konkurrenzanlockungsthese.

Residualgewinne oder aber des Fortführungswerts der Residualgewinne[26] am Unternehmenswert besagen für sich nichts: Es geht um die Werthaltigkeit des bilanziellen Eigenkapitals, und diese ist nur durch Diskontierung künftiger Erträge (oder Cash Flows) zu bestimmen[27]. Das ist im übrigen dasselbe Argument, das man zu Recht dem Substanzwert entgegnet hat: Substanz ohne Ertrag ist wertlos[28]; die Ertragskraft der Substanz darf man nicht ohne Prüfung unterstellen.

Damit läßt sich auch der dritte vermeintliche Vorteil entkräften. Wenn die Höhe der Bestandsgröße EK_0 keinen Einfluß auf den Unternehmenswert hat und – wie auch *Schultze* zeigt[29] – beliebig angesetzt zu werden vermag[30], dann ist sie aussagelos. Es kommt allein auf die Diskontierung künftiger Erträge oder Cash Flows an. Damit unterliegt das Residualgewinnmodell aber genau den üblichen Kritikpunkten gegenüber den Mischverfahren.

III. Residualgewinnmodell bei unsicheren Erwartungen

1. Darstellung

Man kann Gleichung (1) um Wahrscheinlichkeitsverteilungen erweitern und anstelle der sicheren Größen die zugehörigen Erwartungswerte mit einem risikoangepaßten Zins oder die zugehörigen Sicherheitsäquivalente mit dem sicheren Zinsfuß diskontieren[31]. Hierbei hat - wie *Feltham/Ohlson* 1999 in einem Time-State-Preference-Ansatz bei Annahme fehlender Arbitrage zeigen - die Sicherheitsäquivalentmethode theoretische Vorteile[32].

---

[26] Darauf stellt Schultze (2003b, S. 462) ab.
[27] Vgl. auch Soffer/Soffer (2003, S. 279): "Generally, a greater portion of value will be attributed to the terminal value in a free cash flow valuation than in residual income valuation. We might conclude from this fact that residual income valuations are more precise, because of the uncertainty surrounding cash flows that are very far out in the future. It is difficult, however, to reconcile this conclusion with the fact that the two models always produce the same result. How could one model be more precise than another model to which it is identical?"
[28] Vgl. Moxter (1983, S. 41-55).
[29] Vgl. Schultze (2003b, S. 463).
[30] Vgl. auch Soffer/Soffer (2003, S. 278): "We could arbitrarily choose *any* number to be the book value as of the valuation date and arrive at the same value for the firm." (Hervorhebung im Original)
[31] Vgl. Ballwieser (2004, S. �).
[32] Vgl. Feltham/Ohlson (1999, S. 171-174).

Davon unabhängig haben die Modelle von *Ohlson* 1995 und *Feltham*/*Ohlson* 1995 das Residualgewinnmodell bei unsicheren Erwartungen unter Einbezug von stochastischen Prozessen populär gemacht. *Ohlson* geht – für risikoneutrale Bewerter – von folgender Beziehung aus[33]:

(9) $$P_t = y_t + \sum_{\tau=1}^{\infty} R_f^{-\tau} E_t\left[\tilde{x}^a_{t+\tau}\right]$$

mit

P_t	=	„Marktwert" oder „Preis"[34] des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t,
y_t	=	Buchwert des Eigenkapitals zum Zeitpunkt t,
R_f	=	Zinsfaktor im Sinne von risikoloser Zinsfuß plus 1,
$E_t[\ ]$	=	Erwartungswertoperator bedingt auf die Information zum Zeitpunkt t,
$\tilde{x}^a_t$	=	Residualgewinn in Periode t im Sinne von Gewinn in Periode t minus Verzinsung des Buchwerts des Eigenkapitals von Periode t-1 mit dem risikolosen Zins.

Für den Residualgewinn wird ein stochastischer Prozeß mit folgenden Eigenschaften angenommen[35]:

(10) $$\tilde{x}^a_{\tau+1} = \omega\, x^a_t + \nu_t + \tilde{\varepsilon}_{1t+1}\,,$$

(11) $$\tilde{\nu}_{t+1} = \gamma_t \nu_t + \tilde{\varepsilon}_{2t+1}$$

mit

ω, γ	=	feste und bekannte Parameter,
$\varepsilon_{1\tau}, \varepsilon_{2\tau}$	=	Störterme mit $E_t[\,\tilde{\varepsilon}_{kt+\tau}\,] = 0$, k = 1,2 und $\tau \geq 1$.

Über die Varianzen und Kovarianzen der Störterme werden keine weiteren Annahmen getroffen.

---

[33] Vgl. Ohlson (1995, S. 667). Ich verwende seine Symbole.
[34] Ich setze die Worte in Anführungszeichen, weil der Marktwert oder Preis jeweils konstruiert, aber nicht am Markt empirisch erhoben wird.

Gleichung (10) beschreibt ein Zeitreihenverhalten des Residualgewinns, wobei über Gleichung (11) eine Information ν einwirkt, die nicht mit dem vergangenen Residualgewinn identisch ist und lediglich von Informationen der vergangenen Periode beeinflußt wird.

Gezeigt werden kann, daß sich aus den Annahmen die Gleichung (12) ergibt[36]:

$$(12) \qquad P_t = y_t + \alpha_1 x_t^a + \alpha_2 \nu_t$$

mit

$\alpha_1 = \omega / (R_f - \omega) \geq 0$,

$\alpha_2 = R_f / (R_f - \omega)(R_f - \gamma) > 0$.

Nach Gleichung (12) ergibt sich der Marktwert des Eigenkapitals aus dem Buchwert des Eigenkapitals, das im Hinblick auf den aktuellen Residualgewinn und eine andere Information, welche die Vorhersage künftiger Residualgewinne beeinflußt, angepaßt wird. Interessanterweise erklären keine zukünftigen Dividenden explizit den Unternehmenswert; auch ist die Ausschüttungspolitik irrelevant.

2. Würdigung

Der Vorteil des Modells von *Ohlson* liegt darin, daß eine explizite Beziehung zwischen Unternehmenswert und Rendite zu Daten des Rechnungswesens hergestellt wird, die sich mit der Annahme verträgt, daß sich der Unternehmenswert als Barwert künftiger Dividenden ergibt[37].

---

[35] Vgl. Ohlson (1995, S. 668).
[36] Vgl. Ohlson (1995, S. 669).
[37] Vgl. Ohlson (1995, S. 681). Nach Möller/Hüfner (2002, S. 421) liefert die Arbeit von Ohlson „erstmals eine Begründung dafür, dass ökonomische und theoretisch hergeleitete Variablen, die man in der Rechnungslegung abzubilden trachtet, für Aktionäre relevant sein können.“ An dieser Aussage lassen sich mehrere Zweifel äußern: (1) Mit der Formulierung "relevant sein können" ist keine harte Aussage verbunden. (2) Buchmäßiges Eigenkapital ist für Aktionäre relevant, weil es in Form von Gewinnrücklagen Ausschüttungspotential darstellt und gemäß § 92 Abs. 1 AktG der Vorstand unverzüglich die Hauptversammlung einzuberufen hat, wenn ein Verlust in Höhe der Hälfte des Grundkapitals besteht. (3) Jahresüberschüsse sind Ausschüttungspotential. (4) Zu Residualgewinnen besteht eine umfangreiche Literatur vor Ohlson. Vgl. nur Fußnote 3 und 7 und die dort ausgewerteten Quellen.

Die Modellierung ist wegen der Erzielbarkeit geschlossener Lösungen elegant und konsistent mit der Theorie der Bewertung von Unternehmen. Sie erleichtert möglicherweise empirische Untersuchungen zur statistischen Erklärung von Börsenkapitalisierungen, weil erwartete Dividenden oder Ausschüttungsquoten nicht geschätzt werden müssen[38].

Aber die Modellierung hat natürlich ihren Preis, weil alle erklärenden Faktoren des Unternehmenswerts in den Eigenschaften und der Interpretation der Parameter des stochastischen Prozesses für die Residualgewinne verborgen sind. Insofern verbietet sich das *Ohlson*-Modell für Zwecke der praktischen Unternehmensbewertung oder des Werthaltigkeitstests.

Die Modelle nach *Ohlson* oder *Feltham/Ohlson* sind Legitimationen für empirische Korrelationsstudien zur Verbindung von Rechnungslegungsdaten und Börsenkapitalisierungen oder Aktienkursrenditen[39]. Diese Korrelationsstudien zur sog. Wertrelevanz werden zu Recht kritisiert, weil sie nicht mehr als Assoziationen untersuchen[40], aber keine kausalen Zusammenhänge.

IV. Zusammenfassung

Das Residualgewinnmodell ist gleichermaßen gut oder schlecht wie die Ertragswertmethode oder die Varianten der Discounted Cash Flow-Methoden für Zwecke der Unternehmensbewertung und des Werthaltigkeitstests des Konsolidierungsgoodwill geeignet. Es läßt sich als Mischverfahren interpretieren und teilt deren Nachteile. Erweiterungen des Modells auf den Fall unsicherer Erwartungen sind möglich, erlauben es aber nicht, praktische Unternehmensbewertungen vorzunehmen. Vielmehr liefern die Erweiterungen erste Begründungen für die Durchführung von Assoziationsstudien über den Zusammenhang von Rechnungslegungsdaten und Börsenkapitalisierungen oder Aktienrenditen.

Literatur

[38] Mit der relativen Prognoseeignung von Rechnungslegungsgrößen läßt sich nach Möller/Hüfner (2001, S. 421) „das kritische Restwertproblem der Aktienbewertung besser in den Griff bekommen".
[39] Vgl. z.B. Seethamraju (2003); Stromann (2003).
[40] Vgl. Holthausen/Watts (2001, S. 4).

Ballwieser, W. (2004): Unternehmensbewertung – Prozeß, Methoden, Probleme. Stuttgart.

Bromwich, M./Walker, M. (1998): Residual Income Past and Future. In: Management Accounting Research, Vol. 9, S. 391-419.

Coenenberg. A.G./Schultze, W. (2003): Residualgewinn- vs. Ertragswertmethode in der Unternehmensbewertung. In: Richter, F./Schüler, A./Schwetzler, B. (Hrsg.): Kapitalgeberansprüche, Marktwertorientierung und Unternehmenswert. Festschrift Drukarczyk, München, S. 117-141.

Coenenberg, A.G./Schultze, W. (2002): Unternehmensbewertung: Konzeptionen und Perspektiven. In: DBW, 62. Jg., S. 597-621.

Edwards, E.O./Bell, P.W. (1961): The Theory and Measurement of Business Income. Berkeley, Cal.

Feltham, G.A./Ohlson, J.A. (1999): Residual Earnings Valuation With Risk and Stochastic Interest Rates. In: The Accounting Review, Vol. 74, S. 165-183.

Feltham, G.A./Ohlson, J.A. (1995): Valuation and Clean Surplus Accounting for Operating and Financial Acitvities. In: Contemporary Accounting Research, Vol. 11, S. 689-731.

Fickert, R. (1985): Ökonomischer Wert und Unternehmungsrechnung. In: Die Unternehmung, 39. Jg., S. 132-161.

Hebertinger, M. (2002): Wertsteigerungsmaße – Eine kritische Analyse. Frankfurt am Main.

Holthausen, R.W./Ross, L.W. (2001): The Relevance of the Value-Relevance Literature for Financial Accounting Standard Setting. In: Journal of Accounting and Economics, Vol. 31, S. 3-75.

Jacob, H. (1960): Die Methoden zur Ermittlung des Gesamtwertes einer Unternehmung. In: ZfB, 30. Jg., S. 131-147 und S. 209-222.

Lücke, W. (1955): Investitionsrechnung auf der Grundlage von Ausgaben oder Kosten? In: ZfhF, 7. Jg., S. 310-324.

Möller, H.P./Hüfner, B. (2002): Zur Bedeutung der Rechnungslegung für den deutschen Aktienmarkt – Begründung, Messprobleme und Erkenntnisse empirischer Forschung. In: Seicht, G. (Hrsg.): Jahrbuch für Controlling und Rechnungswesen 2002. Wien, S. 405-463.

Moxter, A. (1983): Grundsätze ordnungsmäßiger Unternehmensbewertung. 2. Aufl., Wiesbaden.

Ohlson, J.A. (1995): Earnings, Book Values, and Dividends in Equity Valuation. In: Contemporary Accounting Research, Vol. 11, S. 661-687.

Ordelheide, D. (1998): Rechnungslegung und internationale Aktienanalyse. In: Möller, H.P./Schmidt, F. (Hrsg.): Rechnungswesen als Instrument für Führungsentscheidungen. Festschrift Coenenberg, Stuttgart, S. 505-524.

Peasnell, K.V. (1982): Some Formal Connections Between Economic Values and Yields and Accounting Numbers. In: Journal of Business Finance and Accounting, Vol. 9), S. 361-381.

Pellens, B./Sellhorn, T. (2001): Neue Goodwill-Bilanzierung nach US-GAAP. In: DB, 54. Jg., S. 713-720.

Preinreich, G.A.D. (1938): Annual Study of Economic Theory: The Theory of Depreciation. In: Econometrica, Vol. 6, S. 219-241.

Prokop, J. (2004): Der Einsatz des Residualgewinnmodells im Rahmen der Unternehmensbewertung nach IDW S 1. In: FB, 6. Jg., S. 188-193.

Schultze, W. (2003a): Methoden der Unternehmensbewertung. 2. Aufl., Düsseldorf.

Schultze, W. (2003b): Kombinationsverfahren und Residualgewinnmethode in der Unternehmensbewertung: konzeptioneller Zusammenhang. In: KoR, 3. Jg., S. 458-464.

Seethamraju, C. (2003): The Value Relevance of Trademarks. In: Hand, J./Lev, B. (Hrsg.): Intangible Assets - Values, Measures, and Risks, New York u.a., S. 228-247.

Soffer, L.C./Soffer, R. J. (2003): Financial Statement Analysis: A Valuation Approach. Upper Saddle River, N.J.

Solomons, D. (1965): Divisional Performance: Measurement and Control. Homewood, Ill.

Stewart, G. B. III (1991): The Quest for Value. New York.

Stromann, H. (2003): Wertrelevanz deutscher und US-amerikanischer Rechnungslegungsinformationen, Wiesbaden.

a.o.Univ.-Prof. Dr. Christopher Casey
Institut für Finanzierung und Finanzmärkte
Abteilung für Investmentbanking und Katallaktik
Wirtschaftsuniversität Wien
Althanstraße 39-45. A 1090 Wien
E-mail: christopher.casey@wu-wien.ac.at

Das Kruschwitz/Löffler-Paradoxon - Ein Paradoxon?

von Christopher Casey

Version 1, Juni 2004

Inhaltverzeichnis

Workshop Unternehmensbewertung – 12. Juni 2004
Universität Hannover, Lehrstuhl für Banken und Finanzierung

1. Problemstellung

In diesem Beitrag wird ein scheinbares Wachstumsparadoxon der besonderen Art diskutiert, namentlich das so genannte Kruschwitz/Löffler-Paradoxon.[1] Nach Kruschwitz/Löffler (1998) und anderen Fachvertretern[2] ist der Eigenkapitalmarktwert eines Unternehmens, „das buchstäblich niemals Dividende an seine Eigentümer ausschüttet, aus logischen Gründen keinen Heller wert. Warum sollte man auch einen positiven Preis zahlen, wenn man sicher sein kann, niemals in den Genuß irgendwelcher Einkünfte zu gelangen?“[3]

Das Szenario eines ewig thesaurierenden Unternehmens resultiert im Modell aus der fundamentalen Handlungsmaxime der Investitionstheorie, nach der alle Investitionsprojekte mit positivem Kapitalwert zu realisieren sind. Folgt das Management der Unternehmung dieser Handlungsmaxime, dann wird es bei Vorliegen vorteilhafter Investitionsmöglichkeiten alle freien Cash Flows einbehalten und reinvestieren. Der Markt- beziehungsweise Ertragswert der künftigen „Null“-Dividenden kann in diesem Fall, wie Kruschwitz/Löffler zutreffender Weise feststellen, aus rein logischen Gründen nur null sein.

Matschke/Hering (1999) haben gegen das von Kruschwitz/Löffler formulierte Paradoxon vorgebracht, dass dieses in einer den Eigentümerinteressen entgegenlaufenden suboptimalen Dividendenpolitik begründet liegt[4]. Nach ihrer Auffassung ließe sich ein positiver Eigenkapitalmarktwert durch bloße Abkehr von der dividendenlosen Investitions- und Ausschüttungspolitik realisieren. Kruschwitz/Löffler (1999) weisen im Rahmen einer diesbezüglichen Replik darauf hin, dass eine solche Änderung der Unternehmenspolitik zwar in der Tat aus einem wertlosen ein wertvolles Unternehmen machen würde, diese Politik jedoch die von ihnen getroffene Annahme einer optimalen Investionspolitik verletzten würde. Nach dem Kapitalwertkriterium ist es schließlich für die Eigentümer vorteilhaft, wenn alle Investitionsprojekte mit positivem Kapitalwert realisiert werden.

Nach dieser Gegenüberstellung von Positionen erscheint es fast so, als ob die Ausschüttungs- und Investitionspolitik der Unternehmung konkurrierende Zielsetzungen verfolgen würden.

Die wohl überzeugendste Argumentation in Bezug auf das Kruschwitz/Löffler-Paradoxon wurde von Blaufus (2002) vorgelegt. Seinen Ausführungen zufolge, liegt das „Phänomen des erfolgreichen, aber aufgrund ewiger Thesaurierung wertlosen Unternehmens“[5] darin begründet, dass Kruschwitz/Löffler „den Wert ihres erfolgreichen Unternehmens lediglich als

[1] Der Begriff des Kruschwitz/Löffler-Paradoxons wurde von Siegel (2000), S. 728, in die Diskussion eingeführt.
[2] Vgl. Blaufus (2002), S. 1517 und die dort angegebene Literatur.
[3] Kruschwitz/Löffler (1998), S. 1041.
[4] Vgl. Matschke/Hering (1999), S. 920. Zu einer im Ergebnis ähnlich lautenden Schlußfolgerung kommt auch Siegel (2000), S. 728, der in diesem Zusammenhang von einem irrationalen Eigentümerverhalten spricht.
[5] Blaufus (2002), S. 1517.

Barwert der künftigen Dividenden […] berechnen, den unendlich hohen ‚Verkaufspreis' […] jedoch unzulässigerweise unterschlagen. Berücksichtigt man hingegen den Verkaufspreis, erhält man anstelle eines Unternehmenswertes von null, einen Unternehmenswert, der unendlich hoch ist."[6] Die Zusammenhänge werden von Blaufus wie folgt formalisiert:[7]

(1a) $$P_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Div_t}{(1+i)^t} + \frac{P_\infty}{(1+i)^\infty}$$

(1b) $$EV_\infty = AK_0 \cdot (1+r)^\infty$$

P_0 = Eigenkapitalmarktwert im Bewertungszeitpunkt
Div_t = Dividende im Zeitpunkt t
P_∞ = Liquidationswert/Veräußerungspreis
i = Kalkulationszinssatz
EV_∞ = Endvermögen
AK_0 = Anfangsvermögen
r = Rendite

AK_0 bezeichnet das im Bewertungszeitpunkt 0 vorhandene Unternehmensvermögen. Es werden annahmegemäß alle frei verfügbaren Cash Flows investiert. Jede Nettoinvestition geht gleichzeitig mit einer Erhöhung des Unternehmensvermögens einher. Zur Modellierung dieses Zusammenhangs unterstellt Blaufus „*zur Vereinfachung*"[8] eine im Zeitablauf konstante Verzinsung des Vermögens, wobei $r > i$ angenommen wird. Das Endvermögen wird in der Grenzbetrachtung $T \rightarrow \infty$ unendlich groß. Hieraus folgert Blaufus, dass auch der potentielle Veräußerungspreis für das Vermögen unendlich groß ist: „P_∞ kann […] nicht kleiner sein als das unendlich große Endvermögen".[9] Der Marktwert des riskanten Endvermögens ist grundsätzlich definiert als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte Barwert des erwarteten Endvermögens. Unter der getroffenen Annahme $r > i$ resultiert dann im Rentenmodell ein unendlich großer Marktwert für das unendlich große Endvermögen.

In der Argumentation von Blaufus wird der Liquidationswert der Unternehmung in letzter Konsequenz nicht als ein zu Marktwerten gemessener Ertragswert künftiger Dividendenzahlungen, sondern als ein zu Buchwerten gemessener Substanzwert im Zeitpunkt der Veräußerung im Modell abgebildet. Dieser Substanzwert wiederum stellt die Preisuntergrenze bei einer Veräußerung des Unternehmens dar. Wenngleich der unendlich große Veräußerungserlös in unendlich weiter Ferne liegt, so ist sein Marktwert für $r > i$ dennoch unendlich groß.[10]

---

[6] Blaufus (2002), S. 1519.
[7] Vgl. Blaufus (2002), S. 1519, Gleichung (7) und Gleichung (8).
[8] Blaufus (2002), S. 1519; Kursivdruck durch den Verfasser.
[9] Blaufus (2002), S. 1519.
[10] Dieser eher befremdlich wirkende Zusamenhang wird von Blaufus wie folgt gewürdigt: „Gegen die Berücksichtigung des Endvermögens als ‚Untergrenze' des Veräußerungspreises lässt sich auch nicht einwenden, dass dieses im vorliegenden Fall nie ausgeschüttet wird. Es wird nämlich […] nur deshalb nicht ausgeschüttet, weil

Im Wege einer kritischen Auseinandersetzung mit den von Blaufus vorgebrachten Einwänden greifen Kruschwitz/Löffler (2003a) das scheinbare Paradoxon des erfolgreich thesaurierenden, aber wertlosen Unternehmens neuerlich auf. Die Autoren kommen dieses Mal zwar zu der Überzeugung, dass ihre „ursprüngliche Vorgehensweise bei der Herleitung des Paradoxes logisch nicht korrekt war,“[11] stellen aber zugleich fest, dass die von Blaufus verwendeten Bewertungs- und Lösungsprozeduren „mit der Vorstellung von einem arbitragefreien Markt nicht vereinbar“[12] sind. Wird ein Liquidationserlös im Modell explizit berücksichtigt – in der Terminologie von Kruschwitz/Löffler als „vollständiges DCF-Modell“ bezeichnet – dann zeigt sich nach Meinung der Autoren, „das die Bewertung von Zahlungsströmen mit unendlicher Laufzeit auf der Grundlage eines vollständigen DCF-Modells zu beliebigen Ergebnissen führt […].“[13] Das Unternehmen kann „nichts, eine Geldeinheit oder auch eine Million Geldeinheiten wert sein. Jeder Wert […] verträgt sich mit dem vollständigen DCF-Modell oder besser: er widerspricht ihm nicht. […]. Damit entziehen sich Unternehmen, die ewig Gewinne thesaurieren, weil die interne Rendite größer als der Marktzins ist, einer Bewertung mit Hilfe von DCF-Verfahren.“[14] Diese Erkenntnis wird analog zu Blaufus auf eher pragmatisch-intuitive Weise gewonnen, in dem der Unternehmenswert im Zeitpunkt t als $V_t = C \cdot (1+i)^t$ modelliert wird, wobei „die Variable C dem Wert des Unternehmens heute“[15] entspricht.

In den weiteren Ausführungen zu diesem Beitrag wird die von Blaufus (2002) vorgebrachte Argumentation weitergeführt und auf der Grundlage des von Copeland/Koller/Murrin (1990) entwickelten Value Driver-Modells formaltheoretisch präzisiert (Kapitel 2). Die Bewertungsmodalitäten werden hierbei – entgegen der üblichen Vorgehensweise – im Kontext eines so genannten multiplikativen Free Cash Flow-Prozesses[16] mit modellendogen bestimmten Wachstumsraten in den erwarteten Cash Flows sowie unter expliziter Berücksichtigung eines Liquidationserlöses der Unternehmung herausgearbeitet (Kapitel 3).[17] Die ökonomischen Implikationen des Kruschwitz/Löffler-Paradoxons werden auf diese Weise richtig augenscheinlich. Im Ergebnis wird gezeigt, dass die theoretisch konsequente Formulierung des Be-

---

das Fortführungsvermögen höher eingeschätzt wird als das Liquidationsvermögen. Ursache für die Nicht-Ausschüttung ist also die bei Thesaurierung erzielbare Steigerung des Vermögenswerts. Wenn man von der Nicht-Ausschüttung auf einen Veräußerungspreis von null schließen würde, so verkennt man die Ursache der Nicht-Ausschüttung, die eben in der von rationalen Eigentümern erwarteten Steigerung des Unternehmenswertes liegt.“ [Blaufus (2002), S. 1519].

[11] Kruschwitz/Löffler (2003a), S. 1401.

[12] Kruschwitz/Löffler (2003a), S. 1402.

[13] Kruschwitz/Löffler (2003a), S. 1402.

[14] Kruschwitz/Löffler (2003a), S. 1402.

[15] Kruschwitz/Löffler (2003a), S. 1402.

[16] Vgl. zum multiplikativen Cash Flow-Modell insbesondere Fama (1977); auch Kruschwitz/Löffler (2003b), S. 36 ff.; Laitenberger/Löffler (2002); Schwetzler (2000), S. 475 ff.; Sick (1986), S. 29 f..

[17] Eine dieser Bewertungsmethodik prinzipiell entsprechende Modellierung ohne Berücksichtigung eines Liquidationswertes findet sich bei Herrmann/Richter (2003), S. 197-199. In ihrem Modell wird die Gordon/Shapiro-Wachstumsformel unter Zugrundelegung eines multiplikativen Binomial Free Cash Flow-Prozesses mit (im Zeitablauf konstanten) reziproken up- und down-Faktoren unter Berücksichtigung einer wertorientierten Finanzierungspolitik und unter Verwendung von risikoneutralen Bewertungs- und Lösungsprozeduren hergeleitet.

wertungsproblems unter Einschluss des Liquidationserlöses wesentlich komplexer ist als es die Darstellungen von Blaufus (2002) und Kruschwitz/Löffer (2003a) vermuten lassen. Um das Hauptergebnis vorwegzunehmen: Im Wege der Marktwertermittlung des Liquidationswertes kommen periodenspezifische Kalkulationszinssätze zur Anwendung. Die Ableitung dieser Diskontierungszinssätze erfolgt hier über eine geeignete Dekomposition des riskanten Kapitalbestandes im Zeitpunkt der Liquidation des Unternehmensvermögens. Ein bewusst einfach gehaltenes und durchwegs verwendetes Beispiel begleitet die Untersuchung. Der Beitrag schließt in Kapitel 4 mit einer Zusammenfassung von Ergebnissen.

2. Theoretischer Bezugsrahmen

2.1 Zum Begriff des organischen Unternehmenswachstums

Von maßgeblicher Bedeutung für die problemadäquate Auseinandersetzung mit dem Kruschwitz/Löffler-Paradoxon ist das ihm zugrunde liegende Wesensmerkmal des „organischen“ Unternehmenswachstums. Rudolf/Witt (2002) geben diesbezüglich folgende Interpretation:

> „Ökonomisches Wachstum entsteht einmal bei steigender Produktivität der Unternehmen, wenn also die gleichen Produkte und Dienstleistungen mit immer geringerem Faktoreinsatz und in immer kürzerer Produktionszeit angeboten werden können. Wachstum ist aber auch die Folge von Innovationen, also der Markteinführung von neuen Produkten und neuen Fertigungsverfahren. Sie schaffen neue Märkte und erhöhen die Effizienz der Unternehmen.“[18]

Wesentliches Merkmal von Unternehmenswachstum nach dieser Begriffsdefinition ist, dass ein Unternehmen von innen heraus wächst,[19] was prinzipiell bedeutet, dass Unternehmenswachstum durch Forschung und Entwicklung beziehungsweise Investitionen in Forschung und Entwicklung und damit in letzter Konsequenz durch Nettoinvestitionen begründet wird.

Als Maßstab des Unternehmenswachstums kommen grundsätzlich verschiedene Größen in Betracht, wie etwa Mitarbeiteranzahl, Bilanzsumme, Umsatz, Gewinn oder Marktkapitalisierung.[20] Im Discounted Cash Flow-(DCF-)Modell wird Unternehmenswachstum dem Leitbild des Shareholder Value-Ansatzes folgend an Dividenden- und Aktienkurssteigerungen ge-

[18] Rudolf/Witt (2002), S. 7. In Bezug auf den Begriff des Wachstumsunternehmens stellen Rudolf/Witt (2002) sodann ebenso prägnant fest: „Das impliziert, dass Unternehmen, die andere Firmen akquirieren, nicht allein deshalb Wachstumsunternehmen sind.“ [Rudolf/Witt (2002), S. 12.].
[19] „True growth is organic and comes from within.“ [Bernstein (1956), S. 88; zitiert nach Rudolf/Witt (2002), S. 19].
[20] Vgl. Rudolf/Witt (2002), S. 19.

messen.[21] Wenn man berücksichtigt, dass künftige Marktwerte von Aktien Erwartungen über in noch fernerer Zukunft liegende Dividendenzahlungen reflektieren, dann wird deutlich, warum Unternehmenswachstum in den gängigen Modellen zur DCF-Bewertung durch nur ein einziges Kriterium, namentlich erwartete Dividendensteigerungen, abgebildet wird. Dividendensteigerungen wiederum resultieren nach der Vorstellung des hier verwendeten Wachstumsbegriffs aus Nettoinvestitionen.

Der grundlegende Zusammenhang zwischen Investitionen, Dividenden und heutigem Aktienwert wird von Schmidt/Terberger (1997) wie folgt formuliert:

> Die an die Anteilseigner fließenden „**Nettodividenden** sind die als Dividenden deklarierten Zahlungen der Unternehmung an ihre Aktionäre *einschließlich* eventueller Kapitalrückzahlungen im Falle einer Liquidation oder einer Kapitalherabsetzung und *abzüglich der Einlagen*, die die Eigentümer nach dem Bewertungszeitpunkt noch einbringen müssen. […]. Die Nettodividenden sind […] das Ergebnis von zuvor getroffenen Investitionsentscheidungen. […]. Zu prognostizieren und in die Bewertung einzubeziehen sind also die Nettodividenden bei *optimalen* Investitionsplänen. […]. Der **Wert einer Aktie** gleicht dem Barwert aller erwarteten zukünftigen Nettodividenden pro Aktie, mit denen die Aktionäre rechnen, wenn sie unterstellen, daß die Unternehmung alle vorteilhaften Investitionen durchführt.“[22]

Bleiben etwaige Einlagen von den Eigentümern und Rückzahlungen aus Kapitalherabsetzungen an die Eigentümer nach dem Bewertungszeitpunkt außer Betracht, dann umfassen die *künftigen Nettodividenden* zum einen die *„regulären“ jährlichen Dividendenzahlungen*, zum anderen den *Liquidationserlös* im Zeitpunkt der Beendigung der Geschäftstätigkeit. Der Marktwert des Eigenkapitals ergibt sich in weiterer Folge als der mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelte *Barwert der erwarteten Dividendenzahlungen* zuzüglich des mit geeigneten Kalkulationszinssätzen ermittelten *Barwertes des* (*erwarteten*) *Liquidationserlöses*.

Die erwarteten Dividendenzahlungen sind unter der Maßgabe zu prognostizieren, dass die Unternehmung alle vorteilhaften Investitionen durchführt. Ein Investitionsprojekt ist nach dem Kapitalwertkriterium vorteilhaft, wenn sein Kapitalwert positiv ist. Für eine Operationalisierung des Konzepts sind einerseits Investitionsalternativen über die Zeit zu spezifizieren, andererseits die finanziellen Wirkungen dieser Alternativen zu prognostizieren. Ein geeignetes Instrumentarium zur Modellierung dieser Zusammenhänge wird von den so genannten Value Driver-Modellen der DCF-Theorie bereitgestellt.

---

[21] Unternehmensleitbild des Shareholder Value-Ansatzes ist die Erhöhung der Eigentümerrendite (Shareholder Return) über Dividenden (Dividends) und Kurswertsteigerungen der Aktien (Capital Gains). Vgl. hierzu insbesondere Rappaport (1998), S. 32 ff..

[22] Schmidt/Terberger (1997), S. 200; Kursiv- und Fettdruck im Original.

2.2 Wachstumsanalyse mittels Value Driver-Modelle

Value Driver-Modelle wollen grundsätzlich die finanzwirtschaftliche Zielgröße des Shareholder Value (Eigentümervermögen) über kausale Ursache-Wirkungsbeziehungen mit seinen Einflußfaktoren verknüpfen. Hierzu wird der Shareholder Value in einer schrittweisen Analyse in seine finanziellen Haupteinflußfaktoren (Value Driver, Werttreiber) aufgespalten. Jeder Einflußfaktor ist dabei ein Element einer Ursache-Wirkungskette, die ihr Ende in dem finanziellen Leitziel Shareholder Value findet.

Die vielleicht bekanntesten Value Driver-Modelle wurden von Rappaport (1986), Copeland/Koller/Murrin (1990) und Stewart (1991) entwickelt.[23] Diese Modelle unterscheiden sich einerseits im Hinblick auf die verwendete Bewertungsmethode zur Ermittlung des Shareholder Value (zum Beispiel WACC-, APV- oder EVA-Ansatz), andererseits in der konkreten Definition der Werttreiber und ihrer funktionalen Abhängigkeiten. Die Notwendigkeit von Nettoinvestitionen zur Steigerung des Shareholder Value wird dabei von den Vertretern aller Modelle besonders betont.

In allen hier genannten Value Driver-Ansätzen wird dem zu modellierenden Zusammenhang zwischen Nettoinvestitionen und Dividendenwachstum durch vereinfachende Pauschalannahmen Rechnung getragen. Die grundlegenden Wirkungszusammenhänge können anschaulich am Beispiel des Value Driver-Modells von Copeland/Koller/Murrin verdeutlicht werden. In der von Ihnen entwickelten Standard-Modellvariante werden geometrisch wachsende erwartete Cash Flows über einen unendlichen Zeitraum (Rentenmodell) untersucht.[24] Bleiben Fremdkapitalmaßnahmen vereinfachend außen hervor, dann werden die in die Bewertung involvierten Cash Flows durch das in Tabelle 1 angeführte Cash Flow-Schema beschrieben.[25]

1		Ergebnis vor Zinsen und Steuern (EBIT)
2	–	Steuern
3	**=**	**Net Operating Profit Less Adjusted Taxes (NOPLAT)**
4	+	Abschreibungen
5	–	(Brutto-)Investitionen
6	**–**	**Nettoinvestitionen (NI)**
7	**=**	**Free Cash Flow (FCF)**

Tab. 1: In die Value Driver-Analyse involvierte Cash Flows

[23] In Bezug auf das in diesem Beitrag diskutierte Value Driver-Modell von Copeland/Koller/Murrin wird im Folgenden stets die aktuelle Auflage ihrer Monographie zitiert.
[24] Copeland/Koller/Murrin (2000) variieren die Wachstumsannahmen in ihrem Value Driver-Modell: Sie reichen vom einfachen Rentenmodell ohne Wachstum über eines mit konstanter Wachstumsrate bis zu einem Mehr-Phasen-Modell mit unterschiedlichen Wachstumsraten. Vgl. hierzu Copeland/Koller/Murrin (2000), S. 267 ff..
[25] Vgl. Copeland/Koller/Murrin (2000), S. 138.

In der Zeile 1 steht das Ergebnis vor Zinsen und Steuern (EBIT). Diese Größe soll die operative Ertragskraft des Unternehmens beschreiben, wie sie ohne Berücksichtigung von Steuern und Einwirkungen der Finanzierungsform resultiert. Die Bemessung der Ertragsteuern in Zeile 2 erfolgt auf Basis des EBIT. Nach Abzug der Steuern vom EBIT ergibt sich der von Copeland/Koller/Murrin (2000) als NOPLAT bezeichnete Net Operating Profit Less Adjusted Taxes (Zeile 3). In der Zeile 4 stehen die nicht zahlungswirksamen Abschreibungen. Sie werden, da nicht liquiditätswirksam, zu dem NOPLAT hinzu addiert. Die Ausgaben für Bruttoinvestitionen (Zeile 5) umfassen die Ausgaben für Ersatz- und Erweiterungsinvestitionen. Ersatzinvestitionen werden in Höhe der Abschreibungen angesetzt und dienen dem Erhalt der Kapazität. Der Saldo aus den Zeilen 4 und 5 erfaßt in weiterer Folge die Nettoinvestitionstätigkeit der Unternehmung (Zeile 6). Nach Abzug der Ausgaben für Nettoinvestitionen vom NOPLAT erhält man den Free Cash Flow der Unternehmung (Zeile 7). Der jährliche Free Cash Flow ist dem Grundsatz nach als finanzwirtschaftlicher Zahlungssaldo nach Steuern und (Netto-)Investitionsausgaben aufzufassen, wie er unter der Annahme der vollständigen Eigenfinanzierung für Zahlungen an die Anteilseigner zur Verfügung steht.

Die von Copeland/Koller/Murrin (2000) entwickelte Value Driver-Formel präsentiert sich dann unter der hier getroffenen Annahme der vollständigen Eigenfinanzierung wie folgt:[26]

(2) $$V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1]\cdot(1-e)}{k^{NOPLAT} - e\cdot E_0[R\tilde{O}CE]} = \frac{E_0[F\tilde{C}F_1^{\mathbf{NI}}]}{k^{NOPLAT} - g}$$

$$g = e\cdot E_0[R\tilde{O}CE], \quad g < k^{NOPLAT}$$

Der gemäß (2) definierte Eigenkapitalmarktwert wird von zwei (Haupt-)Value Driver angetrieben: Zum einen von der so genannten Investionsrate e, zum anderen von der erwarteten Kapitalverzinsung $E_0[R\tilde{O}CE]$. Die Investionsrate e beschreibt den relativen Anteil der Nettoinvestitionen einer Periode am riskanten NOPLAT der Periode. Diese Rate wird im Modell als im Zeitablauf konstant angenommen. Die erwartete Kapitalverzinsung $E_0[R\tilde{O}CE]$ beschreibt die finanzielle Produktivität einer Investition. Diese Kennziffer ist, wie eingangs erwähnt, als eine vereinfachenden Pauschalannahme über die Verzinsung des im Unternehmen investierten Kapitals zu deuten – *ROCE* = <u>R</u>eturn <u>O</u>n <u>C</u>apital <u>E</u>mployed.[27] In dem

[26] Vgl. dem Grundsatz nach Copeland/Koller/Murrin (2000), S. 269 ff. unter Berücksichtigung von Fremdkapitalmaßnahmen.

[27] Die Kapitalverzinsung wird bei Copeland/Koller/Murrin nicht wie hier mit ROCE (Return On Capital Employed), sondern mit ROIC (Return On Invested Capital) bezeichnet, wobei ROIC in der ökonomischen Interpretation die Verzinsung einzelner Strategien beschreibt. Dem Untersuchungsziel dieses Beitrages entsprechend wird hier nicht zwischen der Verzinsung des im Bewertungszeitpunkt eingesetzten Kapitals (ROCE) und der Verzinsung einzelner Strategien (ROIC) unterschieden, sodass ROCE = ROIC ist. Vgl. zu der Unterscheidung von ROCE und ROIC Hachmeister (2000), S. 56.

Gleichung (2) zugrunde liegenden Modell der Kapitalisierung einer unendlichen Zahungsreihe gibt das Produkt aus investiertem Kapital und $E_0[\widetilde{ROCE}]$ an, welcher uniforme, unendliche Strom an jährlich erwarteten NOPLATs aus der Investition zu erwarten ist. Die erwartete Kapitalverzinsung wird dabei in Gleichung (2) über alle Investitionsprojekte und über alle Zeit als konstant angenommen. Der in der Bestimmungsgleichung des Eigenkapitalmarktwertes stehende Kapitalkostensatz k^{NOPLAT} bezeichnet den bewertungsrelevanten Kapitalkostensatz des so genannten Basis-NOPLAT- beziehungsweise Basis-Free Cash Flow-Zahlungsstroms, wobei der Basis-NOPLAT-(FCF-)Zahlungsstrom jenen Zahlungsstrom aus NOPLATs beziehungsweise Free Cash Flows beschreibt, wie er ohne wachstumsinduzierende Nettoinvestitionen aus dem im Bewertungszeitpunkt 0 vorhandenen Kapitalstock resultiert.[28]

Es ist augenscheinlich, dass das gemäß Gleichung (2) beschriebene Value Driver-Modell in der Tradition des Gordon/Shapiro-Wachstumsmodells steht:[29]

$$P = \frac{D_1}{k - g}, \qquad g < k \tag{3}$$

P bezeichnet hierbei den Aktienkurs, D_1 die nächste Dividendenzahlung, k den Kalkulationszinssatz und g die jährliche Wachstumsrate der Dividenden.

3. Value Driver-Analyse im Kontext des multiplikativen Cash Flow-Modells

Ausgangspunkt der Untersuchung ist das Modell der Kapitalisierung einer endlichen Zahlungsreihe. Der Planungszeitraum umfasst T Perioden, wobei T den Liquidationszeitpunkt der Unternehmung bezeichnet. Die Unternehmung ist annahmegemäß vollständig eigenfinanziert. Das investierte (operative) Gesamtvermögen wird zu Buchwerten gemessen. Dies gilt gleichermaßen für den Liquidationswert des im Zeitpunkt T vorhandenen Unternehmensvermögens. Das zu Buchwerten gemessene Gesamtvermögen im Bewertungszeitpunkt 0 wird mit KB_0 bezeichnet. Dieses (Anfangs-)Vermögen vermag in Abhängigkeit von der Nettoinvestitionstätigkeit der Unternehmung im Zeitablauf zu schwanken.

3.1 Bewertungsrelevante Zahlungsströme

3.1.1 Basiszahlungsstrom aus NOPLATs

Netto- beziehungswiese Neuinvestitionen werden in der Ausgangskonstellation nicht getätigt. Die jährlichen Abschreibungen entsprechen in diesem Fall den jährlichen Investitionen, so dass in weiterer Folge der jährliche Free Cash Flow der Unternehmung dem jährlichen

[28] Vgl. hierzu im Detail Kapitel 3.
[29] Vgl. zum Wachstumsmodell von Gordon/Shapiro (1956) unter vielen anderen Brealey/Myers (2000), S. 67; Bodie/Kane/Marcus (1996), S. 525 ff..

NOPLAT entspricht: $(NO\tilde{P}LAT_1, NO\tilde{P}LAT_2, \ldots, NO\tilde{P}LAT_T) = (F\tilde{C}F_1, F\tilde{C}F_2, \ldots, F\tilde{C}F_T)$. In den nachfolgenden Beispielrechnungen werden die jährlich erwarteten NOPLATs des Basiszahlungsstroms mit $E_0[NO\tilde{P}LAT_t] = E_0[F\tilde{C}F_t] = 1000$, $t = 1,...,T$, angesetzt. Der dieser erwarteten Cash Flow-Entwicklung zugrunde liegende Cash Flow-Prozess soll die in nachstehender Abbildung dargestellte Dynamik eines multiplikativen Binomial-Prozesses aufweisen.[30]

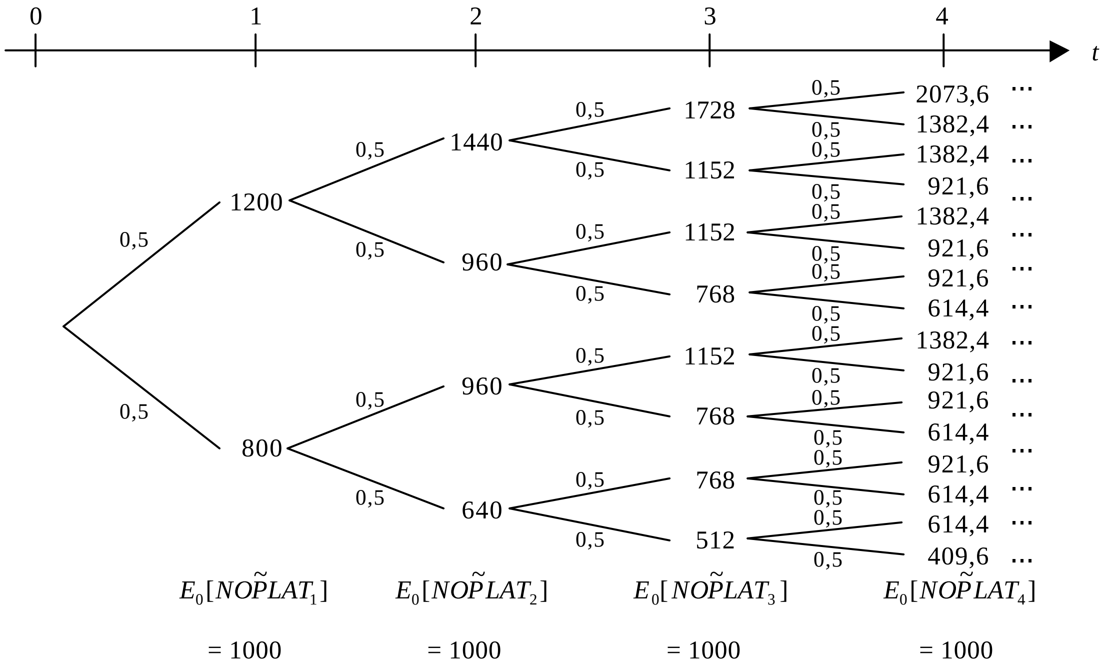


Abb. 1: Zustandsbaum aus NOPLATs (FCFs) mit bedingten statistischen Wahrscheinlichkeiten

In Abbildung 1 ist die stochastische Entwicklung des NOPLAT beziehungsweise Free Cash Flow für die ersten vier Perioden eingetragen. Die relativen NOPLAT-(FCF-)Veränderungen in einer Periode $[t-1, t]$ werden durch die Veränderungsraten beziehungsweise Volatilitätsfaktoren u_t ($u = \text{up}$) und d_t ($d = \text{down}$) beschrieben. In dem hier betrachteten Beispiel werden im Zeitablauf konstante Veränderungsraten unterstellt: In jedem Zeitpunkt und Zustand steigt beziehungsweise fällt der NOPLAT (FCF) des Folgezeitpunktes ausgehend von dem realisierten NOPLAT (FCF) des vorhergehenden Zeitpunktes multiplikativ um den Faktor $1+u = 1+0{,}2$ beziehungsweise $1+d = 1-0{,}2$. Der (fiktive) Startwert des Prozesses ist dabei gleich 1000. Darüber hinaus wird angenommen, dass auch die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten für die Veränderung der NOPLATs (FCFs) über alle Zeitpunkte und Zustände gleich hoch sind: Die Wahrscheinlichkeit einer up- und down-Bewegung beträgt stets 0,5. Der hier unterstellte NOPLAT-(FCF-)Prozess impliziert eine im Zeitablauf konstante Wachstumsrate in den erwarteten Cash Flows in Höhe von null.

[30] Das hier unterstellte Binomial Cash Flow-Modell wird auch bei Richter (2001), S. 189 f. diskutiert. Vgl. im Detail Simplified discount rule 1c, S. 190 sowie die graphische Darstellung des Prozesses in Exhibit 3, S. 191. Vgl. zum multiplikativen Binomial Cash Flow-Modell insbesondere auch Richter (2002); Richter/Drukarczyk (2001).

Für die Ableitung der bewertungsrelevanten Kapitalkosten k^{NOPLAT} des hier betrachteten NOPLAT-(FCF-)Prozesses wäre prinzipiell die Preisdynamik des Prozesses unter Verwendung eines Erklärungsmodells für die gleichgewichtige beziehungsweise arbitragefreie Preisbildung am Kapitalmarkt zu explizieren. Diese Explikation ist für die vorliegende Untersuchung nicht von primärer Bedeutung, so dass hierauf aus Veranschaulichungsgründen verzichtet werden soll. Wenngleich das dem Ansatz zugrunde liegende Preisbildungsmodell in diesem Beitrag nicht explizit offengelegt wird, so sind die in der Untersuchung angesetzten Kapitalkosten dem Grundsatz nach als modellendogen bestimmt zu betrachten. Diese Kapitalkosten könnten auf der Grundlage des risikoneutralen Bewertungsansatzes oder des CAPM bestimmt worden sein.[31]

Die Unternehmung wird annahmegemäß im Zeitpunkt T zu Buchwerten liquidiert. Der Liquidationserlös ist im Modell wegen der abschreibungsbedingten und NOPLAT-unabhängigen Kapitalerhaltung im Bewertungszeitpunkt 0 mit Sicherheit bekannt: $KB_T = KB_0$. Der im Zeitpunkt T anfallende Liquidationserlös ist dann zwecks Wertbestimmung mit dem risikolosen Zinssatz r zu diskontieren.

Der Marktwert der nicht wachsenden Unternehmung lässt sich unter Berücksichtigung dieser Beziehungen sowie unter Anwendung der Summenformel für endliche geometrische Reihen wie folgt formulieren:[32]

$$(4) \qquad V_0^{NOPLAT} = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_t]}{(1+k^{NOPLAT})^t} + \frac{KB_T}{(1+r)^T} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1]}{k^{NOPLAT}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+k^{NOPLAT})^T}\right) + \frac{KB_0}{(1+r)^T}$$

Im Modell der Kapitalisierung einer unendlichen Zahlungsreihe (Rentenmodell) erhält man für $T \to \infty$ aus (4):

$$(5) \qquad V_0^{NOPLAT} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1]}{k^{NOPLAT}}$$

Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Liquidationserlöses der nicht wachsenden Unternehmung ist demnach im Rentenmodell gleich null.

Wird in dem hier diskutierten Beispiel ein Kapitaleinsatz beziehungsweise Kapitalbestand im Zeitpunkt 0 in Höhe von $KB_0 = 5000$ unterstellt, dann impliziert dies eine jährlich erwartete Kapitalverzinsung in Höhe von 20%:

---

[31] Vgl. hierzu Fußnote 16 und die dort angegebene Literatur.

[32] Die Summenformel für endliche geometrische Reihen lautet: $S_T = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{T-1} = (q^T - 1)/(q-1)$.

(6) $E_0[\tilde{ROCE}_t] = E_0[\tilde{ROCE}] = E_0\left[\frac{\tilde{NOPLAT}_t}{KB_0}\right] = \frac{E_0[\tilde{NOPLAT}_t]}{KB_0} = \frac{1000}{5000} = 0{,}20, \quad t = 1,\ldots,T$

In der Interpretation von Gleichung (6) gilt: $E_0[\tilde{NOPLAT}_t] = KB_0 \cdot E_0[\tilde{ROCE}], \ t = 1,\ldots,T$. Die nachstehende Abbildung zeigt die stochastische Entwicklung der als Quotient aus $\tilde{NOPLAT}_t$ und Kapitalbestand KB_0 definierten Kapitalverzinsung $\tilde{ROCE}$. Dieser auf den Kapitalbestand $KB_0 = 5000$ normierte Cash-Flow-Prozess des Basiszahlungsstroms beschreibt jenen stochastischen NOPLAT-Prozess wie er aus dem Einsatz einer Geldeinheit im Bewertungszeitpunkt 0 resultiert.

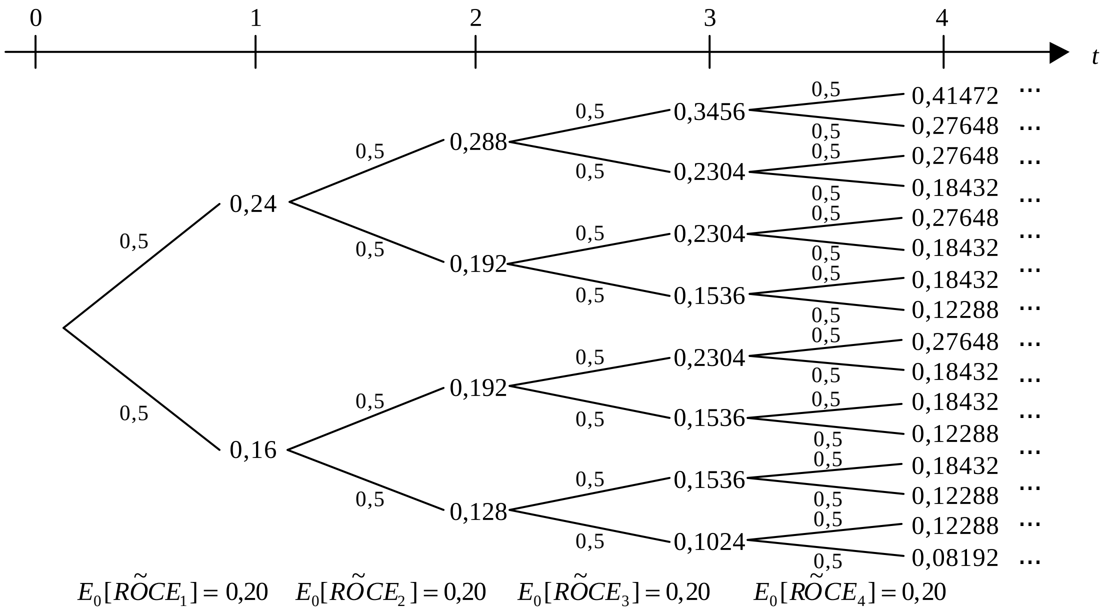


Abb. 2: Zustandsbaum aus Basis-NOPLATs (FCFs) normiert auf eine Geldeinheit Kapitaleinsatz

3.1.2 Zusatz-NOPLATs aus Nettoinvestitionen

Als nächstes wird unterstellt, dass die Modellunternehmung in der Zukunft Nettoinvestitionen durchführt. Diese Nettoinvestitionen werden durch die Einbehaltung von NOPLATs finanziert. Die periodischen Free Cash Flows der netto-investierenden Unternehmung ergeben sich dann aus den periodischen NOPLATs der nicht wachsenden Unternehmung zuzüglich der von Nettoinvestitionen generierten periodischen Zusatz-NOPLATs abzüglich der periodischen Nettoinvestitionsausgaben. Jede Nettoinvestition führt dabei zu einer Erhöhung des zu Buchwerten gemessenen Unternehmensvermögens.

Von maßgeblicher Bedeutung für die theoretisch konsistente Ableitung der Gordon/Shapiro-Wachstumsformel in der Interpretation des Value Driver-Modells von Copeland/Koller/Murrin (1990) ist die Annahme, dass die in der Zukunft getätigten Nettoinvestitionen

NOPLAT-Zahlungsströme generieren, die hinsichtlich Ertrag und Risiko dem Basiszahlungsstrom im Bewertungszeitpunkt 0 gleichwertig sind,[33] sich mithin als ein Vielfaches (beziehungsweise einen Bruchteil) des Basiszahlungsstromes darstellen lassen. In der ökonomischen Interpretation bedeutet dies, dass künftige Nettoinvestitionen zwar im Hinblick auf die Investitionshöhe riskant sind, die im Zeitpunkt ihrer Durchführung erwartete Verzinsung der Investitionen jedoch im Bewertungszeitpunkt 0 mit Sicherheit bekannt ist. Die solcherart charakterisierte Investitionspolitik der Unternehmung impliziert nicht nur stochastisch unabhängige Kapitalrenditen über verschiedene Investitionsprojekte, sondern auch über verschiedene Perioden hinweg. Künftige Nettoinvestitionen lassen mithin im Beispiel unabhängig von der Entwicklung des Basis-NOPLAT stets eine Verzinsung von 20% im Zeitpunkt ihrer Durchführung erwarten. Die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Verzinsung der stochastischen Nettoinvestitonen beträgt in weiterer Folge ebenfalls 20%.

Im Zeitpunkt 1 werden in Abhängigkeit von dem realisierten NOPLAT Nettoinvestitionen in Höhe von $\tilde{NI}_1 = NO\tilde{P}LAT_1 \cdot e$ getätigt. Wird in dem hier diskutierten Beispiel eine Investitionsrate von $e = 0{,}15$ unterstellt, dann erhält man:

$$NI_{11} = NOPLAT_{11} \cdot e = 1200 \cdot 0{,}15 = 180 \qquad NI_{12} = NOPLAT_{12} \cdot e = 800 \cdot 0{,}15 = 120$$

Die im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt 1 erwarteten Nettoinvestitionsausgaben betragen:

$$E_0[\tilde{NI}_1] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e = KB_0 \cdot E_0[R\tilde{O}CE] \cdot e = KB_0 \cdot g = 5000 \cdot 0{,}03 = 150$$

$$g = e \cdot E_0[R\tilde{O}CE] = 0{,}15 \cdot 0{,}20 = 0{,}03$$

Abbildung 3 zeigt die stochastische Entwicklung der von $\tilde{NI}_1$ induzierten Zusatz-NOPLATs. Die unter dem Informationsstand von „$NOPLAT_{11} = 1200$“ durchgeführte Nettoinvestition in Höhe von $NI_{11} = 180$ generiert annahmegemäß einen stochastischen Strom von NOPLATs, der in seiner Struktur, das heißt hinsichtlich seiner up- und down-Faktoren, vollkommen ident ist zu der des Basis-NOPLAT-Zahlungsstroms. Der von $NI_{11} = 180$ induzierte NOPLAT-Prozess ist dabei gleich dem $180/5000\,(= 0{,}036)$-fachen des Basis-NOPLAT-Prozesses. Hieraus resultiert ein Strom von (bedingten) erwarteten NOPLATs in Höhe von $E_{11}[NO\tilde{P}LAT_t] = NI_{11} \cdot E_0[R\tilde{O}CE] = 180 \cdot 0{,}20 = 36$, $t = 2,...,T$. Vollkommen analog hierzu generiert die unter dem Informationsstand von „$NOPLAT_{12} = 800$“ durchgeführte Nettoinvestition in Höhe von $NI_{12} = 120$ einen dem Basiszahlungsstrom strukturell entsprechenden stochastischen Strom

[33] Vgl. hierzu im Detail Copeland/Weston (1988), S. 548.

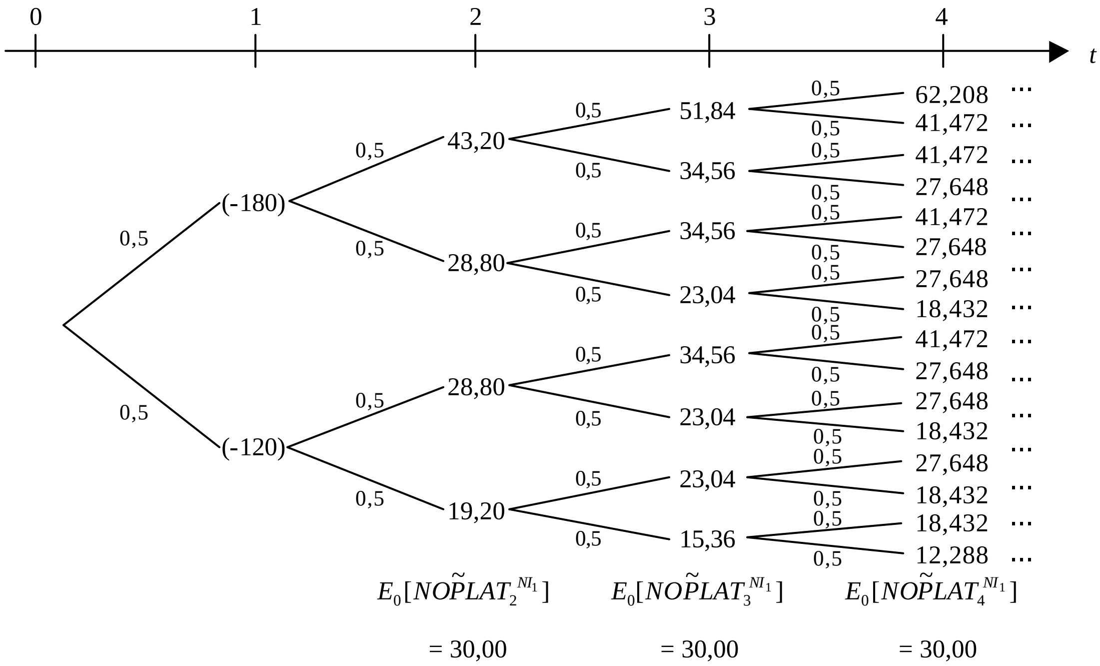


Abb. 3: Zustandsbaum aus zusätzlichen NOPLATs aus der Investition $\tilde{NI}_1$

von NOPLATs mit (bedingten) erwarteten NOPLATs in der Höhe von $E_{12}[NO\tilde{P}LAT_t] = NI_{12} \cdot E_0[R\tilde{O}CE] = 120 \cdot 0{,}20 = 24$, $t = 2,...,T$. Der von $NI_{12} = 120$ induzierte NOPLAT-Prozess ist dabei gleich dem $120/5000\,(= 0{,}024)$-fachen des Basis-NOPLAT-Prozesses. Die im Zeitpunkt 0 für die Perioden $t = 2,...,T$ erwarteten NOPLATs aus $\tilde{NI}_1$ betragen schließlich:

$$E_0[NO\tilde{P}LAT_t^{NI_1}] = E_0[\tilde{NI}_1] \cdot E_0[R\tilde{O}CE] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e \cdot E_0[R\tilde{O}CE]$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot g = 1000 \cdot 0{,}03 = 30, \qquad t = 2,...,T$$

Die nachstehende Abbildung zeigt den aggregierten NOPLAT-Prozess, wie er aus der Addition des Basis-NOPLAT-Prozesses (Abbildung 1) und des von der Nettoinvestition $\tilde{NI}_1$ generierten NOPLAT-Prozesses (Abbildung 3) resultiert.

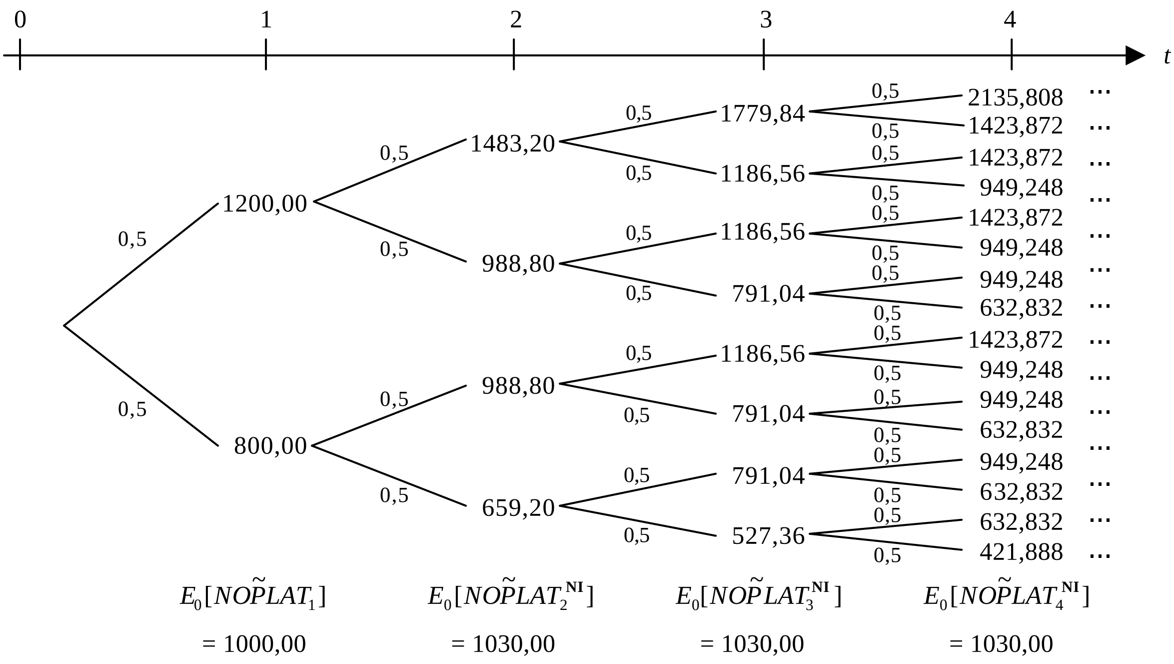


Abb. 4: Aggregierter Zustandsbaum aus Basis-NOPLATs und $\tilde{NI}_1$-NOPLATs

Der im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt 2 erwartete Gesamt-NOPLAT kann dabei wegen $E_0[NO\tilde{P}LAT_2] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1]$ wie folgt dargestellt werden:

$$E_0[NO\tilde{P}LAT_2^{\mathbf{NI}}] = E_0[NO\tilde{P}LAT_2] + E_0[NO\tilde{P}LAT_2^{NI_1}] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] + E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot g$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g) = 1000 \cdot 1{,}03 = 1030$$

Die Nettoinvestitionen im Zeitpunkt 2 bemessen sich wiederum nach der Höhe des im Zeitpunkt 2 realisierten Gesamt-NOPLAT: $\tilde{NI}_2 = NO\tilde{P}LAT_2^{\mathbf{NI}} \cdot e$.[34] Die im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt 2 erwarteten Nettoinvestitionsausgaben sind dann wie folgt bestimmt:

$$E_0[\tilde{NI}_2] = E_0[NO\tilde{P}LAT_2^{NI}] \cdot e = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g) \cdot e$$

$$= E_0[\tilde{NI}_1] \cdot (1+g) = 150 \cdot 1{,}03 = 154{,}50$$

beziehungsweise wegen $E_0[NO\tilde{P}LAT_1] = KB_0 \cdot E_0[R\tilde{O}CE]$:

[34] Für das hier diskutierte Beispiel erhält man folgende zustandsabhängige Nettoinvestitionen im Zeitpunkt 2:

$$NI_{21} = NO\tilde{P}LAT_{21}^{NI} \cdot e = \left(NOPLAT_{21} + NOPLAT_{21}^{NI_1}\right) \cdot e = 1483{,}20 \cdot 0{,}15 = 222{,}48$$
$$NI_{22} = NO\tilde{P}LAT_{22}^{NI} \cdot e = \left(NOPLAT_{22} + NOPLAT_{22}^{NI_1}\right) \cdot e = 988{,}80 \cdot 0{,}15 = 148{,}32$$
$$NI_{23} = NO\tilde{P}LAT_{23}^{NI} \cdot e = \left(NOPLAT_{23} + NOPLAT_{23}^{NI_1}\right) \cdot e = 988{,}80 \cdot 0{,}15 = 148{,}32$$
$$NI_{24} = NO\tilde{P}LAT_{24}^{NI} \cdot e = \left(NOPLAT_{24} + NOPLAT_{24}^{NI_1}\right) \cdot e = 659{,}20 \cdot 0{,}15 = 98{,}88$$

$$E_0[\tilde{NI}_2] = KB_0 \cdot E_0[R\tilde{O}CE] \cdot (1+g) \cdot e$$

$$= KB_0 \cdot g \cdot (1+g) = 5000 \cdot 0{,}03 \cdot 1{,}03 = 154{,}50$$

Die nachstehende Abbildung zeigt die stochastische Entwicklung der von $\tilde{NI}_2$ induzierten Zusatz-NOPLATs.

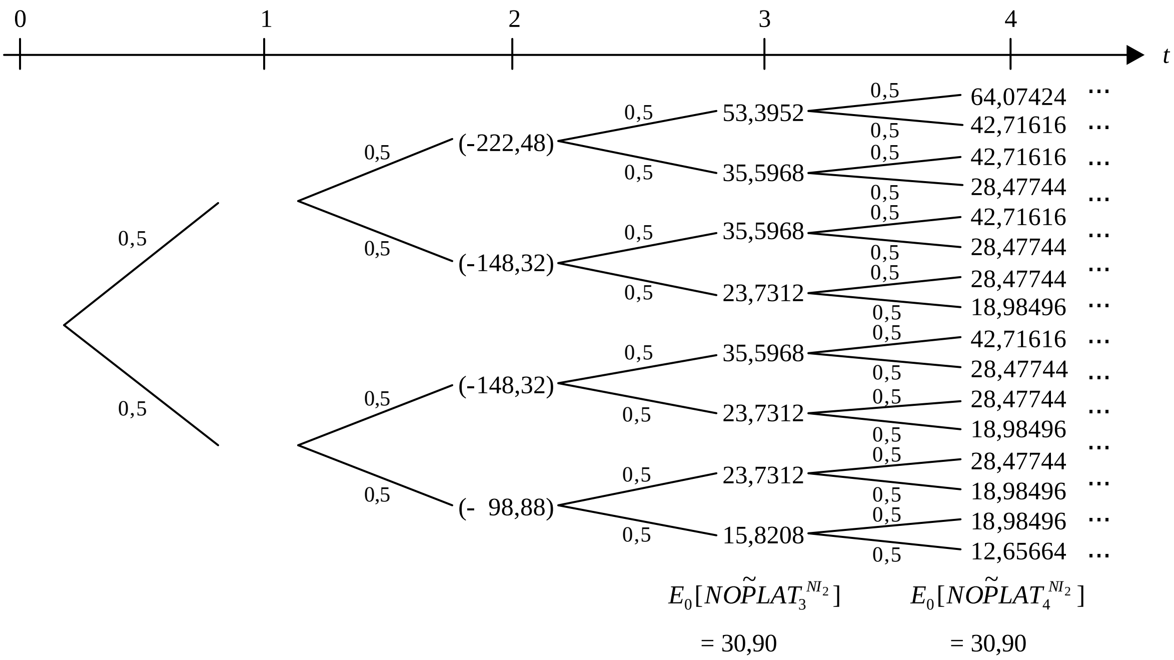


Abb. 5: Zustandsbaum aus zusätzlichen NOPLATs aus der Investition $\tilde{NI}_2$

Die im Zeitpunkt 0 für die Perioden $t = 3,...,T$ erwarteten NOPLATs aus $\tilde{NI}_2$ sind gleich:

$$E_0[NO\tilde{P}LAT_t^{NI_2}] = E_0[\tilde{NI}_2] \cdot E_0[R\tilde{O}CE]$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g) \cdot e \cdot E_0[R\tilde{O}CE]$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot g \cdot (1+g) = 1000 \cdot 0{,}03 \cdot 1{,}03 = 30{,}90, \qquad t = 3,...,T$$

Die nächste Abbildung illustriert den aus der Durchführung von Nettoinvestitionen in den Perioden 1 und 2 resultierenden aggregierten NOPLAT-Prozess.[35]

[35] Dieser Prozess ergibt sich aus dem Basis-NOPLAT-Prozess (Abbildung 1) zuzüglich des von der Nettoinvestition $\tilde{NI}_1$ generierten NOPLAT-Prozesses (Abbildung 3) zuzüglich des von der Nettoinvestition $\tilde{NI}_2$ generierten NOPLAT-Prozesses (Abbildung 5).

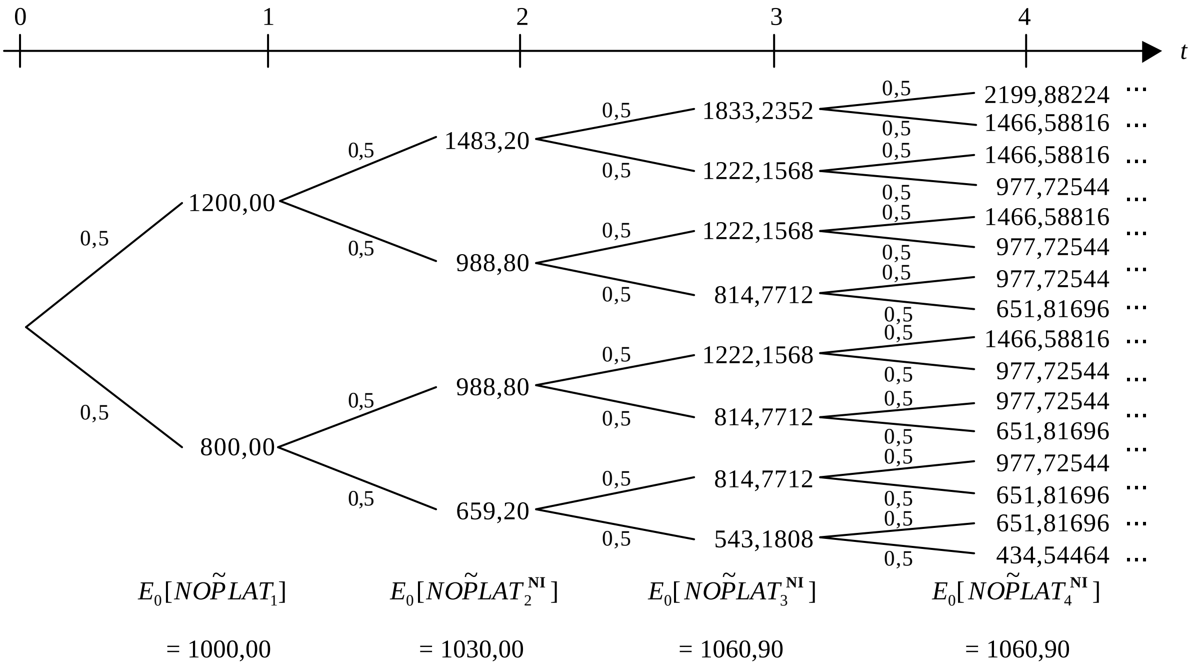


Abb. 6: Aggregierter Zustandsbaum aus Basis-NOPLATs, $\tilde{NI}_1$-NOPLATs und $\tilde{NI}_2$-NOPLATs

Der im Bewertungszeitpunkt 0 für den Zeitpunkt 3 erwartete Gesamt-NOPLAT kann schließlich wegen $E_0[NO\tilde{P}LAT_3] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1]$ wie folgt geschrieben werden:

$$E_0[NO\tilde{P}LAT_3^{\mathbf{NI}}] = E_0[NO\tilde{P}LAT_3] + E_0[NO\tilde{P}LAT_3^{NI_1}] + E_0[NO\tilde{P}LAT_3^{NI_2}]$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] + E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot g + E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot g \cdot (1+g)$$

$$= E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g)^2 = 1000 \cdot 1{,}03^2 = 1060{,}90$$

Wird das hier beschriebene Prozedere zur Bestimmung der in die Bewertung involvierten Cash Flow-Größen bis zum Zeitpunkt T fortgeführt, dann erhält man in allgemeiner Darstellung folgende für die Wertbestimmung bedeutende Beziehungen:

(7) $$E_0[\tilde{NI}_t] = E_0[\tilde{NI}_1] \cdot (1+g)^{t-1} = KB_0 \cdot g \cdot (1+g)^{t-1}, \qquad t = 1,\dots,T$$

(8) $$E_0[NO\tilde{P}LAT_t^{NI}] = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g)^{t-1}, \qquad t = 1,\dots,T$$

$g = e \cdot E_0[R\tilde{O}CE]$

e = Investitionsrate = $NI / NOPLAT$

$E_0[R\tilde{O}CE]$ = Erwartete Verzinsung des Basis - NOPLAT(FCF) - Zahlungsstroms

Nicht zuletzt sei auch der von der unterstellten Investitionspolitik induzierte Free Cash Flow-Prozess betrachtet. Die zeit- und zustandsabhängigen Free Cash Flows der Unternehmung ergeben sich aus den zeit- und zustandsabhängigen Gesamt-NOPLATs abzüglich der entsprechenden zeit- und zustandsabhängigen Ausgaben für Nettoinvestitionen. In formaler Schreibweise: $F\tilde{C}F_t^{\mathbf{NI}} = NO\tilde{P}LAT_t^{\mathbf{NI}} - NO\tilde{P}LAT_t^{\mathbf{NI}} \cdot e = NO\tilde{P}LAT_t^{\mathbf{NI}} \cdot (1-e)$. Die stochastische Entwicklung der Gesamt-NOPLATs und die der Nettoinvestitionsausgaben sind in den nachstehenden Abbildungen eingetragen.

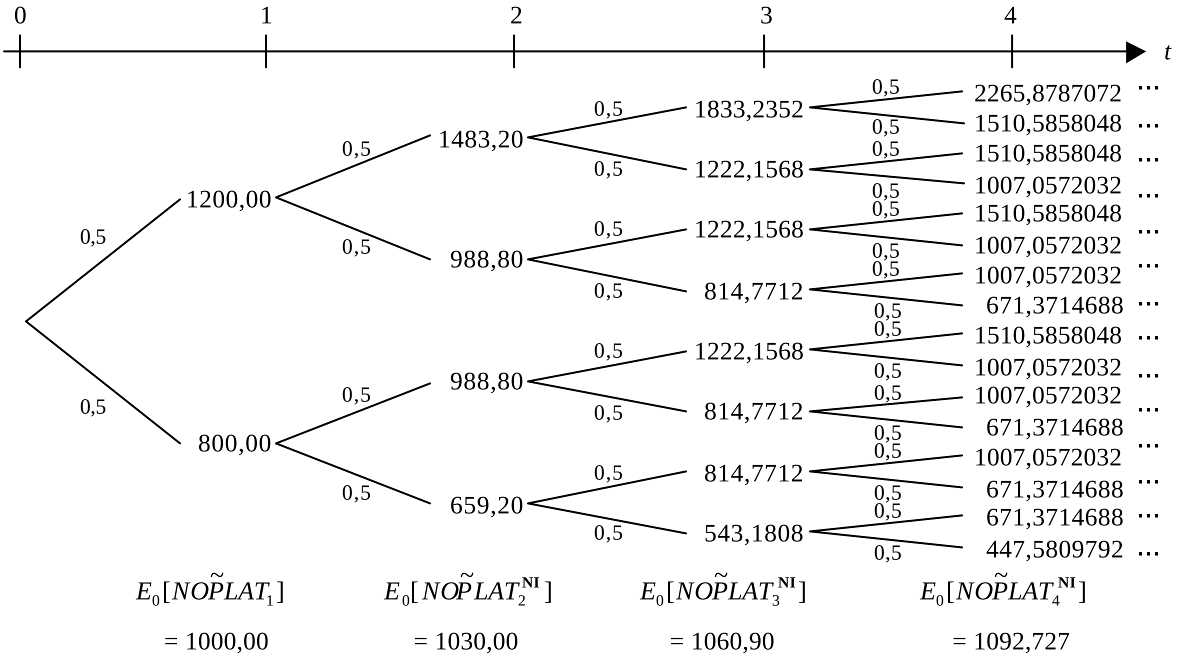


Abb. 7: Aggregierter Zustandsbaum aus Basis-NOPLATs, $\tilde{NI}_1$-, $\tilde{NI}_2$- und $\tilde{NI}_3$-NOPLATs

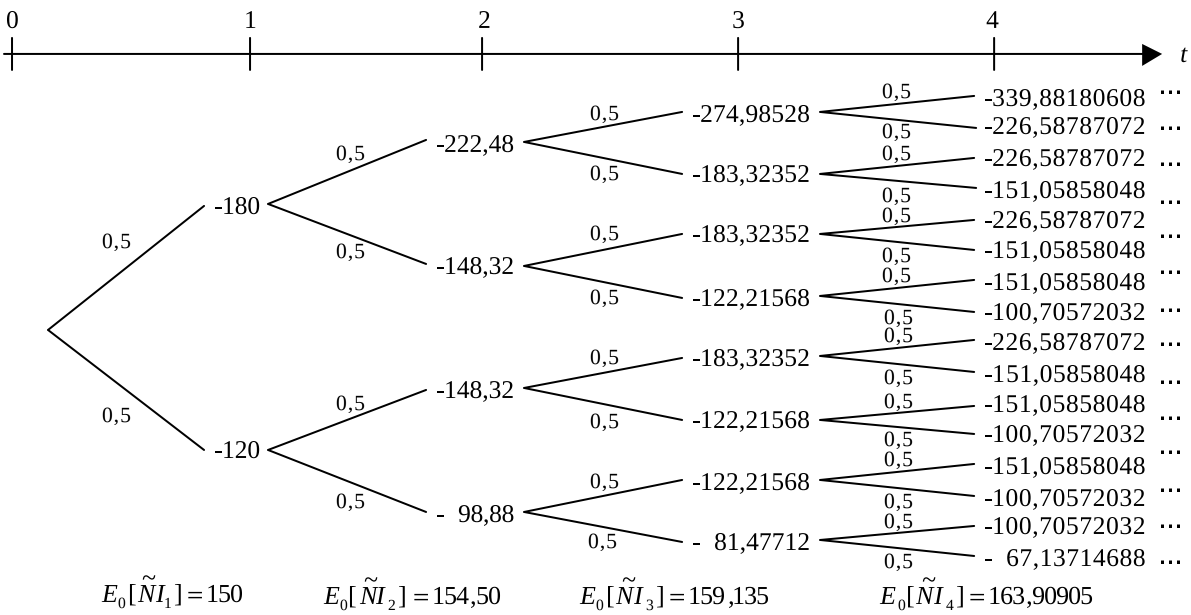


Abb. 8: Zustandsbaum aus Nettoinvestitionsausgaben

Hieraus resultiert der in nachstehender Abbildung dargestellte stochastische Free Cash Flow-Prozess.

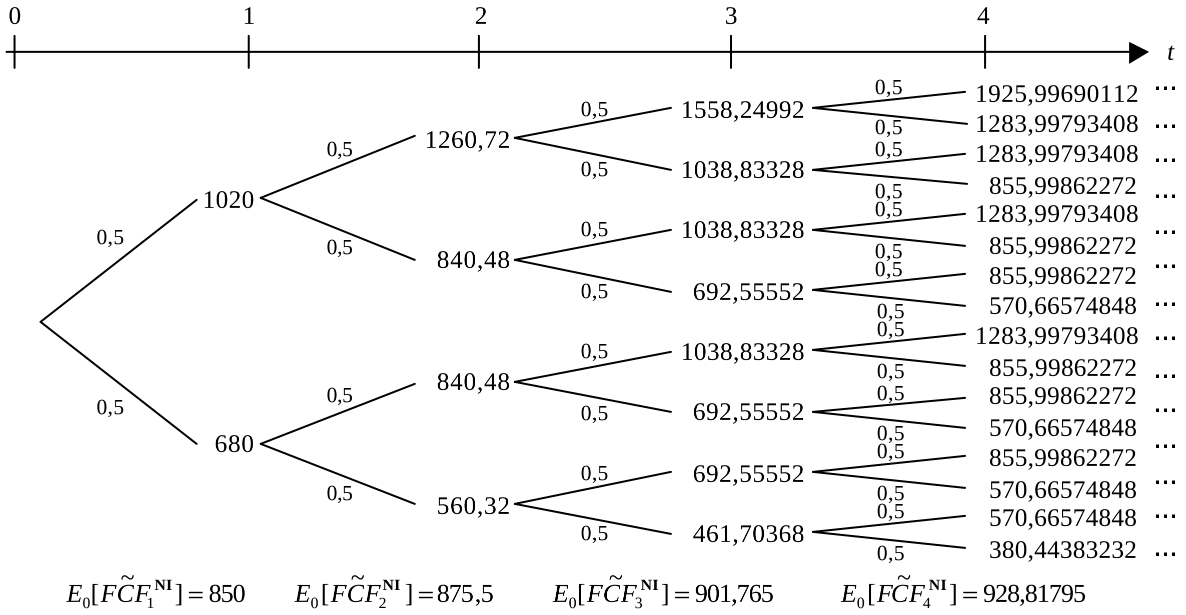


Abb. 9: Aggregierter Zustandsbaum aus Gesamt-NOPLATs und Nettoinvestionsausgaben

Der im Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt *t* erwartete Free Cash Flow ist dabei in allgemeiner Darstellung wie folgt bestimmt:

(9)
$$E_0[\tilde{FCF}_t^{\mathbf{NI}}] = E_0[NO\tilde{P}LAT_t^{\mathbf{NI}}] \cdot (1-e) = E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1+g)^{t-1} \cdot (1-e)$$

$$= E_0[\tilde{FCF}_1^{\mathbf{NI}}] \cdot (1+g)^{t-1}, \qquad t = 1,\dots,T$$

Im nächsten Abschnitt wird die stochastische Entwicklung des Kapitalbestandes vorgestellt.

3.1.3 Der stochastische Liquidationserlös

Der Kapitalbestand im Zeitpunkt T verkörpert den aus der Zerschlagung des Unternehmensvermögens resultierenden Liquidationserlös. Dieser zum Ende des Planungszeitraumes anfallende Liquidationserlös wird einerseits von dem im Bewertungszeitpunkt 0 vorhandenen Kapitalbestand KB_0, andererseits von den durch Nettoinvestitionen $\tilde{NI}_t = NO\tilde{P}LAT_t^{\mathbf{NI}} \cdot e$, $t = 1,\dots,T$ induzierten Erhöhungen des Kapitalbestands bestimmt. Die Nettoinvestitionen einer Periode bemessen sich nach dem NOPLAT der Periode, wobei letzterer aus der Sicht des Bewertungszeitpunktes 0 riskant ist. Die mit den Nettoinvestitionen einhergehenden Kapitalbestandsveränderungen sowie der aus diesen Veränderungen resultierende Kapitalbestand zum Ende des Planungszeitraumes T sind in weiterer Folge ebenfalls riskant. Die nachstehende Abbildung zeigt die stochastische Entwicklung des Kapitalbestandes in dem hier betrachteten Beispiel.

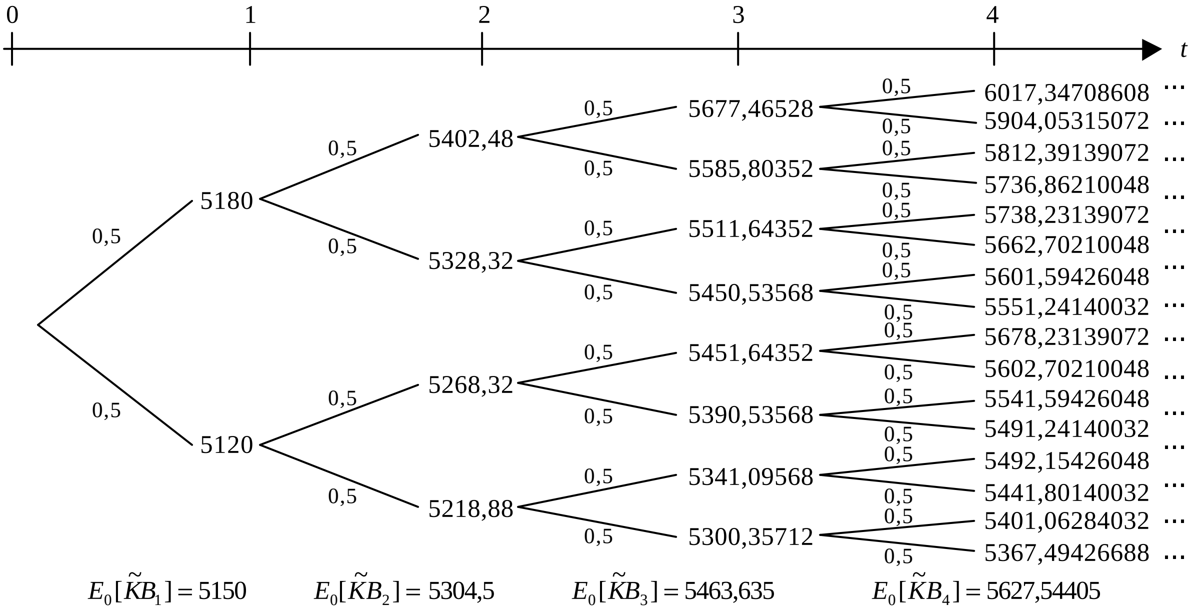


Abb. 10: Stochastische Entwicklung des Kapitalbestandes

Die im Bewertungszeitpunkt 0 erwartete Entwicklung des Kapitalbestandes wird durch nachfolgende Beziehungen charakterisiert:

$$
\begin{aligned}
(10)\quad & E_0[\tilde{K}B_1] = KB_0 + E_0[\tilde{N}I_1] = KB_0 + KB_0 \cdot g && = KB_0 \cdot (1+g) \\
& E_0[\tilde{K}B_2] = E_0[\tilde{K}B_1] + E_0[\tilde{N}I_2] = KB_0 \cdot (1+g) + KB_0 \cdot g \cdot (1+g) && = KB_0 \cdot (1+g)^2 \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \quad \vdots \\
& E_0[\tilde{K}B_t] = E_0[\tilde{K}B_{t-1}] + E_0[\tilde{N}I_t] = \qquad \cdots && = KB_0 \cdot (1+g)^t \\
& \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots && \quad \vdots \\
& E_0[\tilde{K}B_T] = E_0[\tilde{K}B_{T-1}] + E_0[\tilde{N}I_T] = \qquad \cdots && = KB_0 \cdot (1+g)^T
\end{aligned}
$$

Wird ein Planungshorizont von $T = 4$ angenommen, dann ist der riskante Liquidationserlös durch $\tilde{K}B_4$ gegeben, wobei der erwartete Liquidationserlös in dem hier diskutierten Beispiel $E_0[\tilde{K}B_4] = KB_0 \cdot (1+g)^T = 5000 \cdot 1{,}03^4 = 5627{,}54405$ beträgt.

3.2 Wertbestimmung

3.2.1 Bewertungsmethodik

Der Marktwert des Eigenkapitals ist grundsätzlich definiert als Marktwert aller den Eigenkapitalgebern zufließenden Nettoeinnahmen. Für die konkrete Berechnung dieser Nettoeinnahmen sind folgende aus Abschnitt 3.1 bekannte Zahlungsströme von Bedeutung:

$$
\begin{array}{l|lllllll}
NOPLAT & = & (N\tilde{O}PLAT_1, & N\tilde{O}PLAT_2, & N\tilde{O}PLAT_3, & N\tilde{O}PLAT_4, & \dots, & N\tilde{O}PLAT_T) \\
+\ NOPLAT^{NI_1} & = & (& N\tilde{O}PLAT_2^{NI_1}, & N\tilde{O}PLAT_3^{NI_1}, & N\tilde{O}PLAT_4^{NI_1}, & \dots, & N\tilde{O}PLAT_T^{NI_1}) \\
+\ NOPLAT^{NI_2} & = & (& & N\tilde{O}PLAT_3^{NI_2}, & N\tilde{O}PLAT_4^{NI_2}, & \dots, & N\tilde{O}PLAT_T^{NI_2}) \\
+\ NOPLAT^{NI_3} & = & (& & & N\tilde{O}PLAT_4^{NI_3}, & \dots, & N\tilde{O}PLAT_T^{NI_3}) \\
\vdots & & & & & & & \\
+\ NOPLAT^{NI_{T-1}} & = & (& & & & & N\tilde{O}PLAT_T^{NI_{T-1}}) \\
\hline
=\ NOPLAT^{\mathbf{NI}} & = & (N\tilde{O}PLAT_1, & N\tilde{O}PLAT_2^{\mathbf{NI}}, & N\tilde{O}PLAT_3^{\mathbf{NI}}, & N\tilde{O}PLAT_4^{\mathbf{NI}}, & \dots, & N\tilde{O}PLAT_T^{\mathbf{NI}}) \\
\hline
-\ NI & = & (\tilde{NI}_1, & \tilde{NI}_2, & \tilde{NI}_3, & \tilde{NI}_4, & \dots, & \tilde{NI}_T) \\
\hline
=\ FCF^{\mathbf{NI}} & = & (F\tilde{C}F_1^{\mathbf{NI}}, & F\tilde{C}F_2^{\mathbf{NI}}, & F\tilde{C}F_3^{\mathbf{NI}}, & F\tilde{C}F_4^{\mathbf{NI}}, & \dots, & F\tilde{C}F_T^{\mathbf{NI}}) \\
\hline
KB_T & = & (& & & & & \tilde{KB}_T)
\end{array}
$$

Tab. 2: Teilzahlungsströme im Value Driver-Modell

Die regulären jährlichen Nettoeinnahmen der Eigenkapitalgeber resultieren aus den jährlichen Free Cash Flows der Unternehmung, wie sie sich nach Durchführung von Nettoinvestitionen ergeben: $FCF^{\mathbf{NI}} = (F\tilde{C}F_1^{\mathbf{NI}}, F\tilde{C}F_2^{\mathbf{NI}}, \dots, F\tilde{C}F_T^{\mathbf{NI}})$.[36] Im Zeitpunkt T erhalten die Eigenkapitalgeber zudem den zu Buchwerten gemessenen Liquidationserlös $\tilde{KB}_T$. Der Marktwert des Eigenkapitals ergibt sich dann als Marktwert künftiger Free Cash Flows zuzüglich des Marktwertes des Liquidationserlöses:

(11) $$V_0^{EK} = V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} + V_0^{KB_T}$$

Diese Gleichung gilt es im Folgenden zu präzisieren. Ausgangspunkt der Bewertung sind die Marktwerte der riskanten Basis-NOPLATs:

$$
\begin{array}{lcl}
N\tilde{O}PLAT_1 & \Rightarrow & V_0^{NOPLAT_1} = \dfrac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]}{1+k^{NOPLAT}} \\
N\tilde{O}PLAT_2 & \Rightarrow & V_0^{NOPLAT_2} = \dfrac{E_0[N\tilde{O}PLAT_2]}{(1+k^{NOPLAT})^2} \\
 & \vdots & \\
N\tilde{O}PLAT_T & \Rightarrow & V_0^{NOPLAT_T} = \dfrac{E_0[N\tilde{O}PLAT_T]}{(1+k^{NOPLAT})^T}.
\end{array}
$$

[36] Dieser Netto-Einnahmenstrom ergibt sich vor dem Hintergrund von Tabelle 2 aus der Aggregation des Basis-NOPLAT-Zahlungsstroms ($NOPLAT$), der Teilzahlungsströme der von Nettoinvestitionen generierten Zusatz-NOPLATs ($NOPLAT^{NI_1}, \dots, NOPLAT^{NI_{T-1}}$) und des Zahlungsstroms der Nettoinvestitionsausgaben (NI).

Von maßgeblicher Bedeutung für die Bewertung der den Eigenkapitalgebern zufließenden Nettoeinnahmen ist nun der folgende Zusammenhang: Die periodenbezogenen Cash Flows aller Teilzahlungsströme lassen sich als ein Vielfaches beziehungsweise einen Bruchteil der periodenbezogenen Cash Flows des Basis-NOPLAT-Zahlungsstromes darstellen. Die nachfolgende Tabelle illustriert diesen Sachverhalt:

$NOPLAT$	$= ($	$NO\tilde{P}LAT_1$	$NO\tilde{P}LAT_2$	$NO\tilde{P}LAT_3$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \;)$
$NOPLAT^{NI_1}$	$= ($		$NO\tilde{P}LAT_2 \cdot g$	$NO\tilde{P}LAT_3 \cdot g$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot g \;)$
$NOPLAT^{NI_2}$	$= ($			$NO\tilde{P}LAT_3 \cdot g \cdot (1+g)$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot g \cdot (1+g) \;)$
$NOPLAT^{NI_3}$	$= ($				$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot g \cdot (1+g)^2 \;)$
$\vdots$						
$NOPLAT^{NI_{T-1}}$	$= ($					$NO\tilde{P}LAT_T \cdot g \cdot (1+g)^{T-1} \;)$
$NOPLAT^{\mathbf{NI}}$	$= ($	$NO\tilde{P}LAT_1$	$NO\tilde{P}LAT_2 \cdot (1+g)$	$NO\tilde{P}LAT_3 \cdot (1+g)^2$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot (1+g)^{T-1} \;)$
NI	$= ($	$NO\tilde{P}LAT_1 \cdot e$	$NO\tilde{P}LAT_2 \cdot e \cdot (1+g)$	$NO\tilde{P}LAT_3 \cdot e \cdot (1+g)^2$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot e \cdot (1+g)^{T-1} \;)$
$FCF^{\mathbf{NI}}$	$= ($	$NO\tilde{P}LAT_1 \cdot (1-e)$	$NO\tilde{P}LAT_2 \cdot (1-e) \cdot (1+g)$	$NO\tilde{P}LAT_3 \cdot (1-e) \cdot (1+g)^2$	$\cdots$	$NO\tilde{P}LAT_T \cdot (1-e) \cdot (1+g)^{T-1} \;)$
KB_T	$= ($					$\tilde{K}B_T \;)$

Tab. 3: Teilzahlungsströme als Funktion der Basis-NOPLATs

Die periodenbezogenen Cash Flows aller Teilzahlungsströme unterscheiden sich mithin nur in einem Größenfaktor und lassen sich durch proportionale Maßstabsänderung ineinander überführen. Dieser Proportionalitätsfaktor regelt zugleich bei arbitragefreiem Kapitalmarkt die Größenunterschiede in den Preisen der einzelnen Cash Flows. Die Marktwerte der periodenbezogenen Cash Flows aller Teilzahlungsströme ergeben sich dann als Produkt aus dem Marktwert des entsprechenden Basis-NOPLAT und des jeweiligen Proportionalitätsfaktors.[37]

3.2.2 Marktwert künftiger Free Cash Flows

Für den Marktwert künftiger Free Cash Flows erhält man hiernach:

$$(12) \qquad V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_0[FCF_t^{\mathbf{NI}}]}{(1+k^{NOPLAT})^t} = \sum_{t=1}^{T} \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_t] \cdot (1-e) \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+k^{NOPLAT})^t}$$

$$= \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot (1-e)}{1+k^{NOPLAT}} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1+g}{1+k^{NOPLAT}} \right)^t$$

Diese Bewertungsgleichung läßt sich unter Anwendung der Summenformel für endliche geometrische Reihen wie folgt präzisieren:

[37] Die solcherart charakterisierte Bewertung von Cash Flows mittels Proportionalitätsfaktor findet sich in dem von Modigliani/Miller (1958) entwickelten Konzept von der homogenen Risikoklasse wieder.

$$(13a)\qquad g = k^{NOPLAT}: \qquad V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \frac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]\cdot(1-e)}{1+k^{NOPLAT}}\cdot T$$

$$(13b)\qquad g \neq k^{NOPLAT}: \qquad V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \frac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]\cdot(1-e)}{k^{NOPLAT}-g}\cdot\left(1-\left(\frac{1+g}{1+k^{NOPLAT}}\right)^T\right)$$

In der Grenzwertbetrachtung $T \to \infty$ erhält man schließlich für $g < k^{NOPLAT}$:

$$(14)\qquad V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \frac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]\cdot(1-e)}{k^{NOPLAT}-g}$$

Der gemäß (14) definierte Marktwert künftiger Free Cash Flows läßt sich durch geeigntete Dekomposition auch wie folgt formulieren:

$$(15)\qquad V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}} = \frac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]}{k^{NOPLAT}} + \frac{E_0[N\tilde{O}PLAT_1]\cdot e}{k^{NOPLAT}\cdot(k^{NOPLAT}-g)}\cdot\left(E_0[R\tilde{O}CE]-k^{NOPLAT}\right)$$

Gleichung (15) wird in der Finanzierungsliteratur regelmäßig zur Dokumentation des Zusammenhangs zwischen Nettoinvestitionen und Wertschaffung verwendet.[38] Der auf der rechten Seite der Gleichung an erster Stelle stehende Ausdruck beschreibt den Marktwert künftiger Basis-NOPLATs, mithin den Marktwert der nicht-wachsenden Unternehmung. Die solcherart charakterisierte Unternehmung generiert jährlich erwartete Free Cash Flows in Höhe der jährlich erwarteten NOPLATs. Copeland/Weston (1988) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „value of assets in place".[39] Der auf der rechten Seite der Gleichung an zweiter Stelle stehende Ausdruck beschreibt den Saldo aus dem Marktwert der Zusatz-NOPLATs und dem Marktwert der Nettoinvestitionsausgaben, mithin das finanzielle Ergebnis der Nettoinvestitionstätigkeit. Copeland/Weston (1988) sprechen in diesem Zusammenhang von einem „value of future growth".[40] Ein Shareholder Value Added,[41] d.h. ein Mehrwert für die Eigentümer, wird durch Nettoinvestitionen nur dann geschaffen, wenn der Marktwert der Zusatz-NOPLATs größer ist als der Marktwert der Nettoinvestitionsausgaben. Dies ist im Modell stets dann der Fall, wenn die erwartete Kapitalverzinsung $E_0[R\tilde{O}CE]$ größer ist als der Kapitalkostensatz k^{NOPLAT}. Entsprechen sich einnahmen- und ausgabenseitiger Marktwert, dann wird eine den Kapitalkosten k^{NOPLAT} exakt entsprechende Kapital-

[38] Vgl. zum Beispiel Copeland/Weston (1988), S. 552, Gleichung (15.21).
[39] Copeland/Weston (1988), S. 550.
[40] Copeland/Weston (1988), S. 550. Vgl. zu diesen Begriffsverwendungen prinzipiell auch Stewart (1991), S. 254, 286, der von einem „value of current operations" und „value of the forward plan" spricht.
[41] Vgl. zu dieser Begriffsverwendung Rappaport (1998), S. 49 ff..

verzinsung $E_0[\tilde{ROCE}]$ erzielt. Erwirtschaftet eine Unternehmung eine erwartete Kapitalverzinsung in Höhe der Kapitalkosten, dann kann durch eine wie auch immer gestaltete Wachstumsstrategie der Unternehmenswert nicht erhöht werden. Ist die erwartete Kapitalverzinsung $E_0[\tilde{ROCE}]$ schließlich kleiner als k^{NOPLAT}, dann führt jede Wachstumsstrategie zu einer Wertvernichtung für die Eigentümer.

3.2.3 Marktwert des Liquidationserlöses

Die Bewertung des Liquidationserlöses erfolgt durch geeignete Dekomposition des riskanten Kapitalbestandes im Zeitpunkt der Liquidation des Unternehmensvermögens. Im Wege dieser Dekomposition wird der stochastische Kapitalbestand im Zeitpunkt T in jene Einzelbestandteile aufgespalten, aus denen er zuvor durch Aggregation gebildet wurde. Es sind dies zum einen der Kapitalbestand im Bewertungszeitpunkt 0, zum anderen die von Nettoinvestitionen generierten Kapitalbestandsveränderungen im Zeitablauf.

Der im Zeitpunkt 0 vorhandene „Basis“-Kapitalstock KB_0 generiert im Zeitpunkt der Liquidation wegen der abschreibungsbedingten Kapitalerhaltung einen sicheren Kapitalbestand in selber Höhe. Die nachstehende Abbildung illustriert die zeitliche Entwicklung des Basis-Kapitalbestandes für das hier diskutierte Beispiel unter Zugrundelegung eines Liquidationszeitpunktes von $T = 4$.

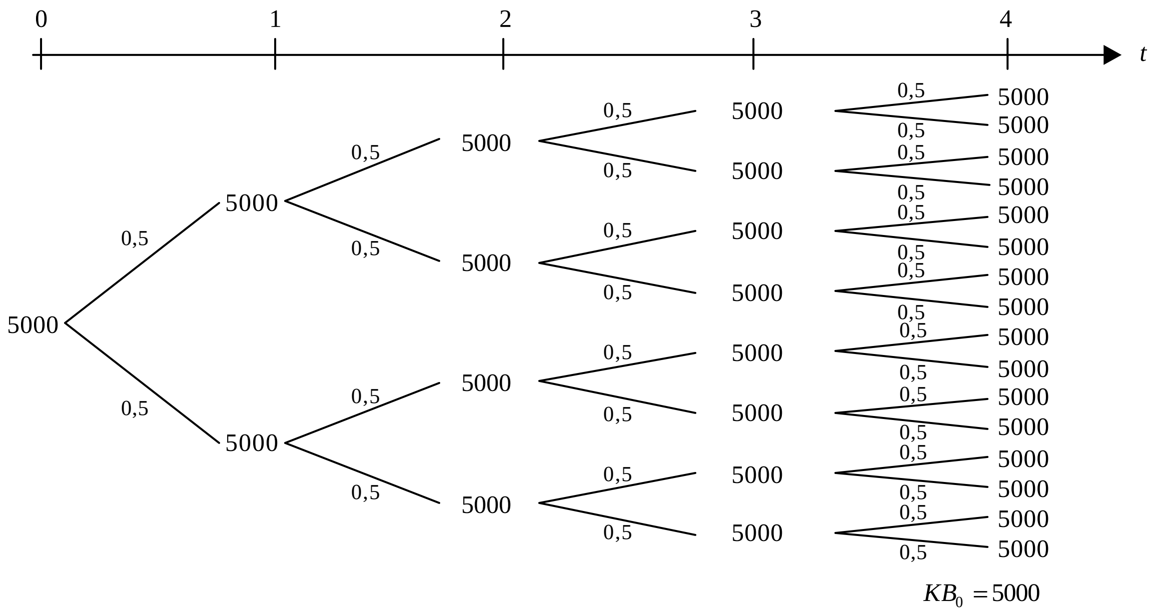


Abb. 11: Zeitliche Entwicklung des Basis-Kapitalbestandes

Der aus dem Basis-Kapitalbestand resultierende Kapitalstock im Liquidationszeitpunkt $T = 4$ ist mit Sicherheit bekannt. Er wird in weiterer Folge zwecks Bewertung mit dem risikolosen Zinssatz über vier Perioden diskontiert.

Im Zeitpunkt 1 werden Nettoinvestitionen getätigt. Diese Nettoinvestitionen bemessen sich nach dem stochastischen NOPLAT des Zeitpunktes 1: $\tilde{NI}_1 = NO\tilde{P}LAT_1 \cdot e$. Sie unterliegen mithin dem gleichen Risiko wie $NO\tilde{P}LAT_1$. Ist der NOPLAT in 1 einmal realisiert, dann stehen die Nettoinvestitionsausgaben dieser Periode als Punktwerte fest. Die unter dem Informationsstand des Zeitpunktes 1 getätigten Nettoinvestitionen generieren dann ebenso wie der Basis-Kapitalbestand wegen der abschreibungsbedingten Kapitalerhaltung einen sicheren Kapitalbestand in selber Höhe im Zeitpunkt T. Die nachstehende Abbildung illustriert die zeitliche Entwicklung der aus $\tilde{NI}_1$ resultierenden Kapitalbestandsveränderungen im Beispiel.

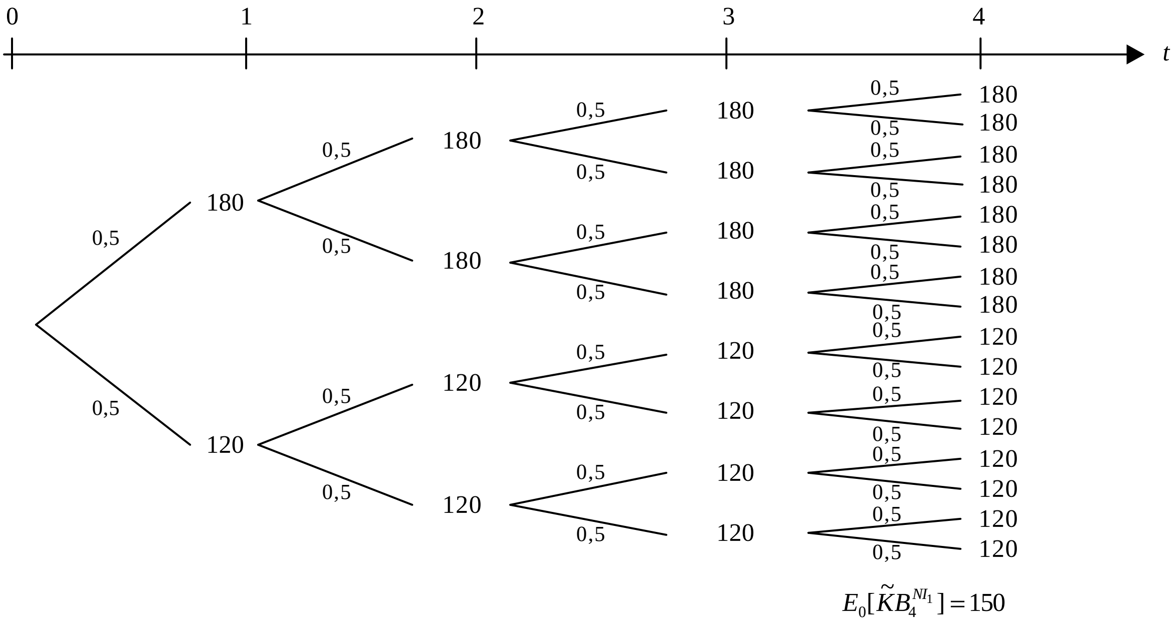


Abb. 12: Zeitliche Entwicklung der aus $\tilde{NI}_1$ resultierenden Kapitalbestandsveränderungen

Die aus $\tilde{NI}_1$ resultierende Kapitalbestandsveränderung im Liquidationszeitpunkt $T = 4$ ist unter dem Informationsstand des Zeitpunktes 1 mit Sicherheit bekannt. Die erwartete Kapitalbestandsveränderung aus $\tilde{NI}_1$ in Höhe von $E_0[\tilde{KB}_4^{NI_1}] = 150$ ist daher über drei Perioden mit dem risikolosen Zinssatz r und über die verbleibende erste Periode mit dem bewertungsrelevanten Diskontierungszinssatz von $NO\tilde{P}LAT_1$, namentlich k^{NOPLAT}, abzuzinsen.

Die aus der Nettoinvestition des Zeitpunktes 2 resultierende erwartete Kapitalbestandsveränderung im Liquidationszeitpunkt $T = 4$ ist vollkommen analog hierzu zu diskontieren. Die zeitliche Entwicklung der aus $\tilde{NI}_2$ resultierenden Kapitalbestandsveränderungen ist in der nachstehenden Abbildung eingetragen.

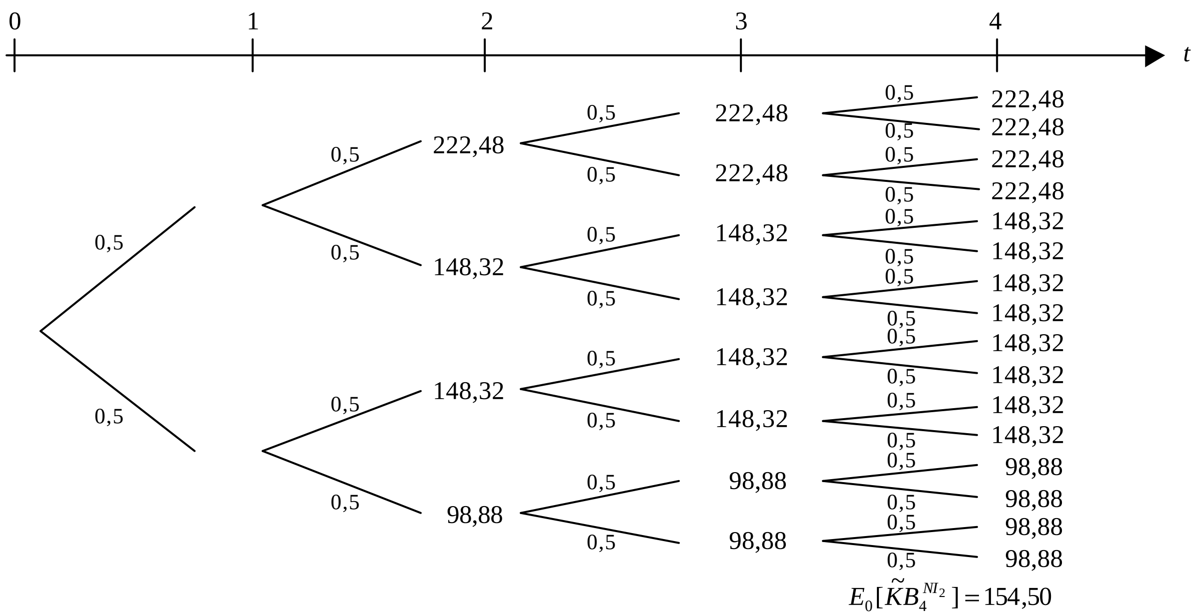


Abb. 13: Zeitliche Entwicklung der aus $\tilde{NI}_2$ resultierenden Kapitalbestandsveränderungen

Die aus $\tilde{NI}_2$ resultierende erwartete Kapitalbestandsveränderung $E_0[\tilde{KB}_4^{NI_2}] = 154{,}50$ ist über zwei Perioden mit dem risikolosen Zinssatz r und über die verbleibenden zwei Perioden mit dem bewertungsrelevanten Diskontierungszinssatz von $NO\tilde{P}LAT_2$, namentlich k^{NOPLAT}, abzuzinsen.

Die hier besprochenen Bewertungsmodalitäten betreffend den stochastischen Liquidationserlös lassen sich in allgemeiner Darstellung wie folgt formalisieren:

$$KB_0 \underset{T \text{ Perioden}}{\Rightarrow} KB_T^{KB_0} \Rightarrow V_0^{KB_T^{KB_0}} = \frac{KB_0}{(1+r)^T}$$

$$\tilde{NI}_1 = NO\tilde{P}LAT_1 \cdot e \underset{(T-1) \text{ Perioden}}{\Rightarrow} \tilde{KB}_T^{NI_1} \Rightarrow V_0^{KB_T^{NI_1}} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e}{(1+r)^{T-1} \cdot (1+k^{NOPLAT})}$$

$$\tilde{NI}_2 = NO\tilde{P}LAT_2 \cdot e \cdot (1+g) \underset{(T-2) \text{ Perioden}}{\Rightarrow} \tilde{KB}_T^{NI_2} \Rightarrow V_0^{KB_T^{NI_2}} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_2] \cdot e \cdot (1+g)}{(1+r)^{T-2} \cdot (1+k^{NOPLAT})^2}$$

$$\tilde{NI}_3 = NO\tilde{P}LAT_3 \cdot e \cdot (1+g)^2 \underset{(T-3) \text{ Perioden}}{\Rightarrow} \tilde{KB}_T^{NI_3} \Rightarrow V_0^{KB_T^{NI_3}} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_3] \cdot e \cdot (1+g)^2}{(1+r)^{T-3} \cdot (1+k^{NOPLAT})^3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\tilde{NI}_T = NO\tilde{P}LAT_T \cdot e \cdot (1+g)^{T-1} \underset{0 \text{ Perioden}}{\Rightarrow} \tilde{KB}_T^{NI_T} \Rightarrow V_0^{KB_T^{NI_T}} = \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_T] \cdot e \cdot (1+g)^{T-1}}{(1+k^{NOPLAT})^T}$$

Der auf den Zeitpunkt 0 bezogene Marktwert des Liquidationserlöses lässt sich mit Hilfe dieser Beziehungen wie folgt formulieren:

(16) $$V_0^{KB_T} = \frac{KB_0}{(1+r)^T} + \sum_{t=1}^{T} \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_t] \cdot e \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+r)^{T-t} \cdot (1+k^{NOPLAT})^t}$$

Der solcherart definierte Marktwert des Liquidationserlöses lässt sich in einem ersten Schritt wegen $E_0[NO\tilde{P}LAT_1] = \cdots = E_0[NO\tilde{P}LAT_T]$ wie folgt umformen:

(17) $$V_0^{KB_T} = \frac{KB_0}{(1+r)^T} + \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e}{1+k^{NOPLAT}} \cdot \frac{1}{(1+r)^{T-1}} \cdot \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{(1+g) \cdot (1+r)}{1+k^{NOPLAT}} \right)^t$$

Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Summenausdruck beschreibt eine endliche geometrische Reihe. Es gelten folgende fallabhängige Beziehungen:

(18a) $(1+g) \cdot (1+r) = 1 + k^{NOPLAT}$:

$$V_0^{KB_T} = \frac{KB_0}{(1+r)^T} + \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e}{1+k^{NOPLAT}} \cdot \frac{1}{(1+r)^{T-1}} \cdot T$$

(18b) $(1+g) \cdot (1+r) \neq (1+k^{NOPLAT})$:

$$V_0^{KB_T} = \frac{KB_0}{(1+r)^T} + \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e}{1+k^{NOPLAT}} \cdot \frac{1}{(1+r)^{T-1}} \cdot \frac{\left(\frac{(1+g) \cdot (1+r)}{1+k^{NOPLAT}} \right)^T - 1}{\frac{(1+g) \cdot (1+r)}{1+k^{NOPLAT}} - 1}$$

$$= \frac{KB_0}{(1+r)^T} + \frac{E_0[NO\tilde{P}LAT_1] \cdot e \cdot (1+r)}{(1+g) \cdot (1+r) - (1+k^{NOPLAT})} \cdot \left(\left(\frac{1+g}{1+k^{NOPLAT}} \right)^T - \left(\frac{1}{1+r} \right)^T \right)$$

Für den von Kruschwitz/Löffler betrachteten Fall der ewig und erfolgreich thesaurierenden Unternehmung ($E_0[R\tilde{O}CE] > k^{NOPLAT}$) erhält man in der Grenzwertbetrachtung $T \to \infty$ folgende fallabhängige Grenzwerte aus (18a) und (18b):[42]

[42] Der obenstehende Fall $(1+g) \cdot (1+r) = 1 + k^{NOPLAT}$ impliziert $g < k^{NOPLAT}$.

Investitionsrate	Wachstumsrate	$\lim_{T\to\infty} V_0^{KB_T}$
$0 \le e < k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}]$	$0 \le g < k^{NOPLAT}$	0
$e = k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}]$	$g = k^{NOPLAT}$	$\frac{E_0[\tilde{NOPLAT}_1]\cdot e \cdot (1+r)}{(1+k^{NOPLAT})\cdot r}$
$k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}] < e < 1$	$k^{NOPLAT} < g < E_0[\tilde{ROCE}]$	∞
$e = 1$ [43]	$g = E_0[\tilde{ROCE}]$	∞

Tab. 4: Fallabhängige Grenzwerte von $V_0^{KB_T}$

Die fallabhängigen Grenzwerte des Marktwertes künftiger Einnahmenüberschüsse (Free Cash Flows) und des Liquidationserlöses sind in der nachstehenden Tabelle für die hier betrachtete Konstellation $E_0[\tilde{ROCE}] > k^{NOPLAT}$ gegenübergestellt.

Investitionsrate	Wachstumsrate	$\lim_{T\to\infty} V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}}$	$\lim_{T\to\infty} V_0^{KB_T}$
$0 \le e < k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}]$	$0 \le g < k^{NOPLAT}$	$\frac{E_0[\tilde{NOPLAT}_1]\cdot(1-e)}{k^{NOPLAT} - g}$	0
$e = k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}]$	$g = k^{NOPLAT}$	∞	$\frac{E_0[\tilde{NOPLAT}_1]\cdot e \cdot (1+r)}{(1+k^{NOPLAT})\cdot r}$
$k^{NOPLAT} / E_0[\tilde{ROCE}] < e < 1$	$k^{NOPLAT} < g < E_0[\tilde{ROCE}]$	∞	∞
$e = 1$	$g = E_0[\tilde{ROCE}]$	0	∞

Tab. 5: Fallabhängige Grenzwerte von $V_0^{FCF^{\mathbf{NI}}}$ und $V_0^{KB_T}$

Ist die Wachstumsrate g kleiner als der Kapitalkostensatz k^{NOPLAT}, dann erhält man im Rentenmodell einen positiv-endlichen Marktwert der künftigen Free Cash Flows und einen Marktwert des Liquidationserlöses in Höhe von null. Ist die Wachstumsrate g gleich k^{NOPLAT}, dann ist der Marktwert der künftigen Free Cash Flows unendlich groß, der Marktwert des Liquidationserlöses hingegen endlich groß. Für $k^{NOPLAT} < g < E_0[\tilde{ROCE}]$ schließlich erhält man sowohl einen unendlichen Marktwert künftiger Free Cash Flows als auch einen unendlichen Marktwert des Liquidationserlöses. Für die alle frei verfügbaren Mittel zur Gänze investierende Kruschwitz/Löffler-Unternehmung ist der Marktwert künftiger Free Cash Flows gleich null, der Marktwert des Liquidationserlöses hingegen unendlich groß.

[43] Die Investitionsrate wird hier über das Intervall $[0,1]$ variiert. „[…] the firm can invest more than cash flow from operations if it provides for the funds by issuing new equity.“ [Copeland/Weston (1988), S. 551.].

4. Zusammenfasssung

In diesem Beitrag wird das so genannte Kruschwitz/Löffler-Paradoxon in einer logisch konsistenten Argumentation aufgelöst. Nach Kruschwitz/Löffler (1998) ist der Eigenkapitalmarktwert eines ewig lebenden Unternehmens, das alle frei verfügbaren Cash Flows zu positiven Kapitalwerten investiert – und in weiterer Folge auch keine Dividenden an seine Eigentümer ausschüttet – keinen Heller wert. Vor dem Hintergrund einer neueren Arbeit von Kruschwitz/Löffler (2003a) wäre dieses scheinbare Wachstumsparadoxon dahingehend zu modifizieren, dass sich Unternehmen, die ewig und erfolgreich investieren und keine Dividende ausschütten, einer Bewertung mit Hilfe von DCF-Verfahren entziehen.

Der Beitrag belegt, dass der Eigenkapitalmarktwert der alle frei verfügbaren Mittel zur Gänze investierenden Kruschwitz/Löffler-Unternehmung bei Berücksichtigung eines Liquidationserlöses unendlich gross ist. Zu diesem Ergebnis kommt bereits Blaufus (2002), der darauf hinweist, dass der Veräußerungspreis für das Vermögen im Liquidationsfalle unendlich groß ist. Wenngleich der unendlich große Veräußerungserlös in unendlich weiter Ferne liegt, so ist sein Marktwert unter den getroffenen Annahmen dennoch unendlich groß. Diese Erkenntnisse werden von Blaufus auf eher pragmatisch-intuitive Weise gewonnen, in dem eine im Zeitablauf konstante Verzinsung des Unternehmensvermögens unterstellt wird. Diese Annahme wiederum ist Anlass für Kruschwitz/Löffler (2003a) darauf hinzuweisen, dass das Modell von Blaufus mit der Vorstellung von einem arbitragefreien Markt nicht vereinbar ist.

In einer Weiterführung dieses Themenkomplexes belegt der vorliegende Beitrag, dass die theoretisch konsequente Formulierung des Bewertungsproblems unter Einschluss des Liquidationserlöses und Lösung desselben wesentlich komplexer sind als es die Darstellungen von Blaufus (2002) und Kruschwitz/Löffer (2003a) vermuten lassen. Im Ergebnis wird gezeigt, dass im Wege der Marktwertermittlung des Liquidationswertes periodenspezifische Kalkulationszinssätze zur Anwendung kommen. Die diesbezüglich relevanten Bewertungs- und Lösungsprozeduren werden auf der Grundlage eines multiplikativen Free Cash Flow-Prozesses mit modellendogen bestimmten Wachstumsraten in den erwarteten Cash Flows herausgearbeitet.

Literatur

Bernstein, P.L. (1956): Growth Companies vs. Growth Stocks, in: Havard Business Review, September, S. 87-98.

Blaufus, K. (2002): Unternehmensbewertung und Probleme mit der Unendlichkeit? – Anmerkungen zu den Beiträgen von Kruschwitz/Löffler, DB 1998 S. 1041, Matschke/Hering, DB 1999 S. 920 und Siegel, FS Brönner, S. 392 –, in: Der Betrieb, S. 1517-1519.

Bodie, Z./Kane, A./Marcus, A.J. (1996): Investments, 3rd ed., Chicago.

Brealey, R.A./Myers, S.C. (2000): Principles of Corporate Finance, 6th ed., Boston.

Copeland, T./Koller, T./Murrin, J. (1990): Valuation. Measuring and Managing the Value of Companies, New York.

Copeland, T./Koller, T./Murrin, J. (2000): Valuation – Measuring and Managing the Value of Companies, Third Edition, New York.

Copeland, T.E./Weston, J.F. (1988): Financial Theory and Corporate Policy, 3rd Ed., Reading.

Fama, E.F. (1977): Risk-Adjusted Discount Rates and Capital Budgeting under Uncertainty, in: Journal of Financial Economics, 5, S. 3-24.

Gordon, M.J./Shapiro, E. (1956): Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit, in: Management Science, 3, S. 102-110.

Hachmeister, D. (2000): Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung, 4., durchgesehene Aufl., Frankfurt/M.

Herrmann, V./Richter, F. (2003): Pricing with Performance-Controlled Multiples, in: Schmalenbach Business Review, 55, S. 194-219.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (1998): Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung, in: Der Betrieb, Heft 21, S. 1041-1043.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (1999): Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung? – Replik zu der Erwiderung von *Matschke/Hering*, DB 1999 S. 920-922 – in: Der Betrieb, Heft 18, S. 922-923.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (2003a): Zur Bewertung ewig lebender Unternehmen mit Hilfe von DCF-Verfahren, in: Der Betrieb, S. 1401-1402.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (2003b): DCF (Part I), version from March 20, erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=389408

Laitenberger, J./Löffler, A. (2002): Capital Budgeting in Arbitrage-Free Markets, Diskussionspapier, Universität Hannover, Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, erhältlich unter: http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=318159

Matschke, M. J./Hering, T. (1999): Unendliche Probleme bei der Unternehmensbewertung? – Erwiderung zu *Kruschwitz/Löffler*, DB 1998 S. 1041 – in: Der Betrieb, Heft 18, S. 920-922.

Modigliani, F./Miller, M.H. (1958): The Cost of Capital, Corporation Finance, and the Theory of Investment, in: American Economic Review, 48, S. 261-297.

Rappaport, A. (1986): Creating Shareholder Value, New York.

Rappaport, A. (1998): Creating Shareholder Value, 2nd Ed., New York

Richter, F. (2001): Simplified Discounting Rules in Binomial Models, in: Schmalenbach Business Review, 53, S. 175-196.

Richter, F. (2002): Simplified Discounting Rules, Variable Growth, and Leverage, in: Schmalenbach Business Review, 54, S. 136-147.

Richter, F./Drukarczyk, J. (2001): Wachstum, Kapitalkosten und Finanzierungseffekte, in: Die Betriebswirtschaft, 61, S. 627-639.

Rudolf, M./Witt, P. (2002): Bewertung von Wachstumsunternehmen, Wiesbaden

Schmidt, R.H./Terberger, E. (1997): Grundzüge der Investitions- und Finanzierungstheorie, 4., akt. Aufl., Wiesbaden.

Schwetzler, B. (2000): Unternehmensbewertung unter Unsicherheit – Sicherheitsäquivalent- oder Risikozuschlagsmethode?, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 52, S. 469-486.

Sick, G.A. (1986): A Certainty-Equivalent Approach to Capital Budgeting, in: Financial Management, 15, S. 23-32.

Siegel, T. (2000): Konsum- oder einkommensorientierte Besteuerung? Aspekte quantitativer und qualitativer Beweisführung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 52, S. 724-741.

Stewart, G.B. (1991): The Quest for Value, New York.

Unternehmensbewertung, Verschuldung und persönliche Steuern

Workshop „Unternehmensbewertung“ veranstaltet vom Lehrstuhl Banken und Finanzierung
Hannover,12. Juni 2004

Dipl.-Kfm. Sebastian Lobe
Lehrstuhl für Finanzdienstleistungen
Universität Regensburg

Agenda I

- $\boxed{\text{Steuersystem}}$
- Bewertung bei Eigenfinanzierung und Kapitalgewinnsteuer
- Wertabhängige Finanzierungspolitik
- Autonome Finanzierungspolitik

Problemstellung I

(Bekannte) These: An einer realitätsnahen Abbildung des Steuersystems führt kein Weg vorbei.

Umsetzung: Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von persönlichen Steuern ($\hat{=}$ differenzierte Einkommensteuern, **Kapitalgewinnsteuer**)

Vorläufer (insbes. Kapitalgewinnsteuer):
- **Sick (1990)**
- **Taggart (1991)**
- **Clubb/Doran (1992)**

Problemstellung II

Annahmen von **Sick (1990), Taggart (1991)**:

- Persönliche Besteuerung keine Auswirkung auf den Wert bei Eigenfinanzierung
- $s_{IE} = s_{KG}$

Clubb/Doran (1992):

Kursgewinn- und Einkommensteuereffekte nur partiell berücksichtigt

Klassisches Steuersystem

- Steuersatz $\mathbf{s^0}$ für Bemessungsgrundlagen (BMG) auf Unternehmensebene

- Einkommensteuersatz auf Eigenkapitaltitel des Eigentümers $\mathbf{s_{IE}}$ für steuerbare Dividende bei Ausschüttung D^{MF}

Steuersystem II

- Einkommensteuersatz auf Fremdkapitaltitel des Eigentümers $\mathbf{s_{IF}}$ für Zinseinkommen auf privater Ebene

- Private Kapitalgewinnsteuer $\mathbf{s_{KG}}$ auf realisierte Kursgewinne bzw. –verluste

  $\Rightarrow$ **Annahme**: Gewinne bzw. Verluste realisiert jeweils am Jahresende

Besteuerung - Kapitalgesellschaft (VZ 2004)

$s_{IF} = s_I$

$s_{IE} = 0,5\, s_I$

$s_{KG} = 0,5\, s_I$ („privates Veräußerungsgeschäft“, innerhalb eines Jahres)

$s^0 = 1-(1-f\, s_{GE})(1-s_K)$, wobei $s_{GE} = \frac{M \cdot H}{1 + M \cdot H}$

$f \triangleq$ Hinzurechnungsfaktor bei Gewerbeertragsteuer für Dauerschuldzinsen

$M = 5\ \%;\ H \geq 200\ \%$

(empirischer Durchschnitt 2003: H = 431%)

Standardannahme: H = 400 %

$$\Rightarrow\ s_{GE} = \frac{M \cdot H}{1 + M \cdot H} = \frac{0{,}05 \cdot 5}{1 + 0{,}05 \cdot 5} = 0{,}1667$$

$s_K = 0{,}25$

$s_I \in [0;0{,}45]$

Spezifikation des Steuersystems – Halbeinkünfteverfahren III

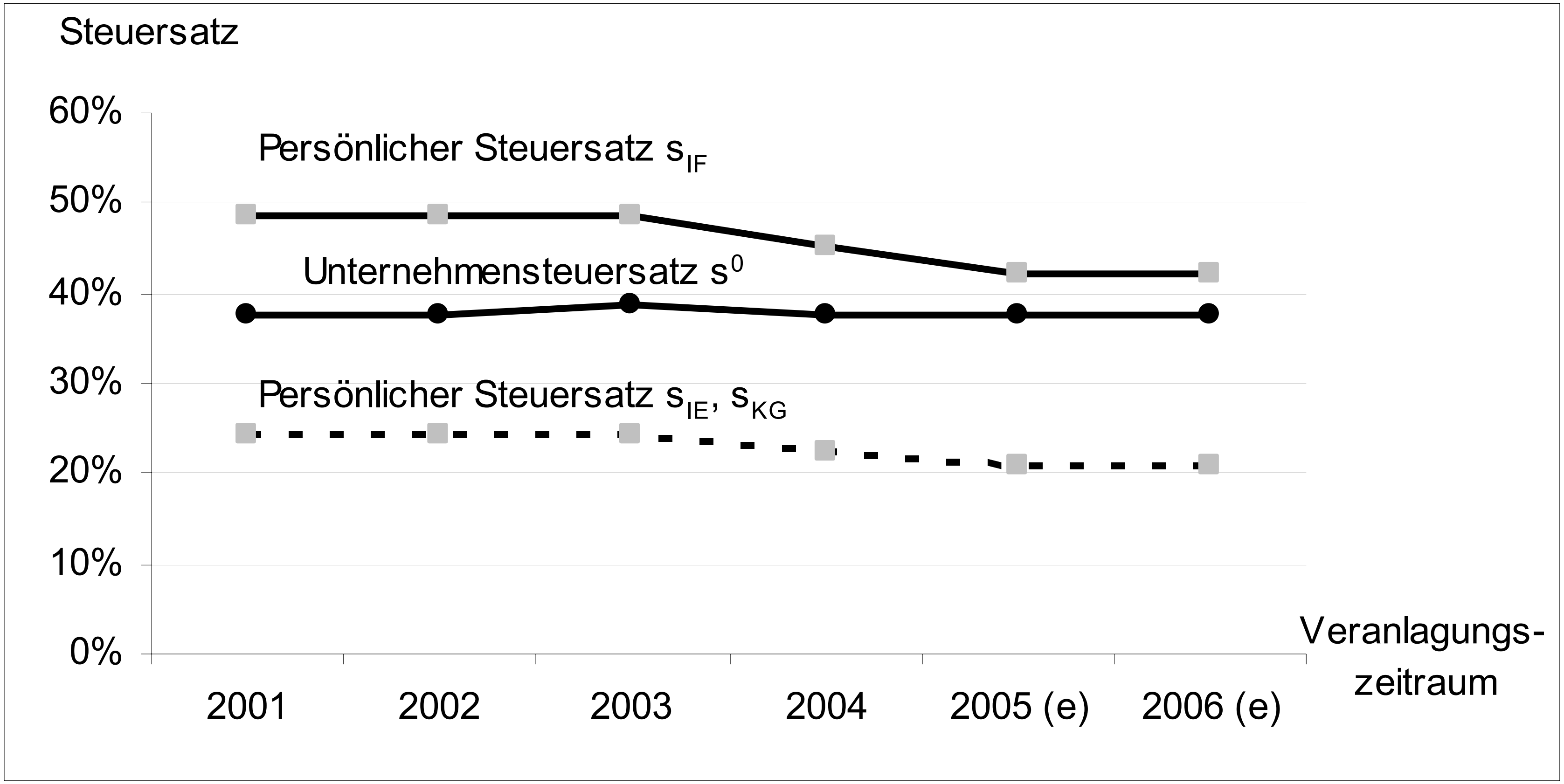


Abbildung 1: Unternehmensteuersätze und persönliche Spitzensteuersätze in Deutschland

Agenda II

- Steuersystem
- Bewertung bei Eigenfinanzierung und Kapitalgewinnsteuer
- Wertabhängige Finanzierungspolitik
- Autonome Finanzierungspolitik

Definition der Gesamtrendite k_S nach Einkommensteuer (bei Eigenfinanzierung):

$$k_{S,t} = \frac{D_t(1 - s_{IE}) + V_t^E}{V_{t-1}^E} - 1$$ *(Total Shareholder Return)*

(Hinreichende) Annahme:

Rendite $k_{S,t}$ und Dividendenquote $\delta_t^* = \frac{\tilde{D}_t}{\tilde{V}_t^E}$ deterministisch

Bewertung bei Eigenfinanzierung

$$\text{BMG}: \; S_{IE,t} = D_t \cdot s_{IE}$$

$$S_{KG,t} = \left(V_t^E - V_{t\text{-}1}^E\right) \cdot s_{KG}$$

Ein-Perioden-Modell

$$V_0^E = \frac{E_0\left[\tilde{D}_1\left(1 - s_{IE}\right) + \tilde{V}_1^E\left(1 - s_{KG}\right)\right]}{1 + k_S} + \frac{s_{KG} \cdot V_0^E}{1 + i\left(1 - s_{IF}\right)}$$

Ewige Rente mit Dividendenwachstum

$$V_0^E = \frac{E_0\left[\tilde{D}_1(1 - s_{IE})\right]}{k_{S,KG} - g \cdot (1 - s_{KG})}$$

$$\text{wobei } k_{S,KG} = k_S + s_{KG} \cdot (1 - m) \text{ und}$$

$$m = \frac{1 + k_S}{1 + i(1 - s_{IF})}$$

→ O´Brien (1991)

(→ Allgemeines Mehr-Perioden-Modell,

s. Backup-Folie 33)

Agenda III

- Steuersystem
- Bewertung bei Eigenfinanzierung und Kapitalgewinnsteuer
- Wertabhängige Finanzierungspolitik
- Autonome Finanzierungspolitik

Illustration des Prinzips an den zwei wohl bekanntesten Politiken (wertabhängig, autonom)

Wertabhängige Finanzierungspolitik

APV-Ansatz

Wert bei Eigenfinanzierung + Wert der Steuereffekte = V_0^F

bekannt: s. V_0^E auf Folie 13

$\Delta V_0^F = ?$

Fall der ewigen Rente

$$\Delta V_0^F = F_0 \cdot \frac{i\left[s^0(1-s_{IE})-(s_{IF}-s_{IE})\right]\cdot m+(s_{KG}-s_{IE})\cdot[1+g-m]}{k_{S,KG}-g(1-s_{KG})}$$

Auch bei g = 0 % sind Kapitalgewinnsteuern von Belang!

… und im Halbeinkünfteverfahren:

$$\Delta V_0^F = F_0 \cdot \frac{i\left[s^0(1-0{,}5s_I)-0{,}5s_I\right]\cdot m}{k_{S,KG}-g(1-0{,}5s_I)}$$

Fall der ewigen Rente mit Wachstum – Halbeinkünfteverfahren I

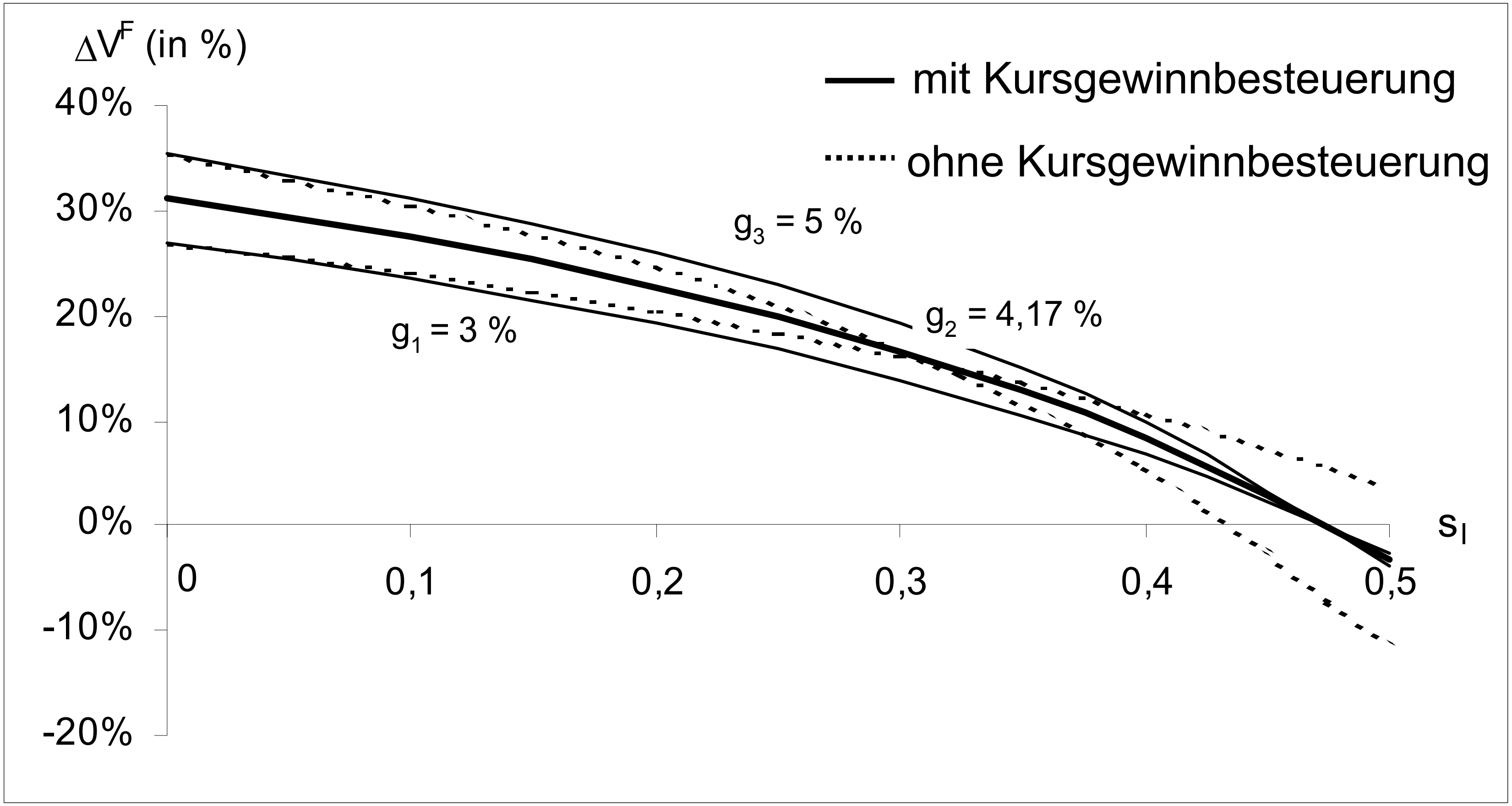


Abbildung 2: Marktbewertung des wertabhängigen Steuervorteils der Fremdfinanzierung

Beobachtungen:

(bei **Annahme** [→ Löffler (2003)] eines vom Steuersystem unabhängigen risikoneutralen Wkt'-Maßes)

- Fett gedruckte Linie (bei g_2 = m-1) $\hat{=}$ Fall einer *autonomen Finanzierungspolitik bei ewiger Rente ohne Wachstum (!)* → Miller (1977), für HEV: Lobe (2001)
- Durch Kapitalgewinnsteuern **Einengung** der Wert-spanne bei **höheren** Einkommensteuersätzen (ab ca. 40 %) gegenüber Fall ohne Kursgewinnbesteuerung
- Wachstum steuert den Werteinfluss der Kursgewinn-besteuerung (neutrale Wachstumsrate: m-1)

Speziellere Steuerkonstellationen

… s_{KG} = 0:

$$\Delta V_0^F = F_0 \cdot \frac{i\left[s^0(1-s_{IE}) - (s_{IF} - s_{IE})\right] \cdot m - s_{IE} \cdot [1+g-m]}{k_S - g}$$

→ Laitenberger (2003)

… s_{KG} = 0; s_{IE} = 0; s_{IF} = 0:

$$\Delta V_0^F = F_0 \cdot \frac{is^0 m}{k-g}$$

→ Miles/Ezzell (1980)

Zwei Planungsdoktrinen üblich:

- Absolute Planung über Fremdkapitalbestände gemäß Plan-Bilanzen
- Relative Planung über Verschuldungsgrade

Beliebige Zahlungsmuster und Planungsdoktrin II

$E_0\left[\tilde{F}\right]$-Planungsdoktrin:

$$E_0\left[\tilde{V}^F_{\tau-1}\right] = \sum_{t=\tau}^{n} E_0\left[\tilde{D}_t + m\cdot\left\{E_0\left[\tilde{F}_{t-1}\right]\cdot\left[i\left(s^0-1\right)-1\right] + E_0\left[\tilde{F}_t\right]/m\right\}\right.$$

$$\left.\cdot\frac{(1-s_{IE})\cdot(1-s_{KG})^{t-\tau}}{(1+k_S-s_{KG}\cdot m)^{t-\tau+1}}\right] + E_0\left[\tilde{F}_{\tau-1}\right]$$

… s_{KG} = 0; s_{IE} = 0; s_{IF} = 0:

$$E_0\left[\tilde{V}^F_{\tau-1}\right] = \sum_{t=\tau}^{n} E_0\left[\tilde{D}_t + m\cdot\left\{E_0\left[\tilde{F}_{t-1}\right]\cdot\left[i\left(s^0-1\right)-1\right] + E_0\left[\tilde{F}_t\right]/m\right\}\right]\cdot\frac{1}{(1+k)^{t-\tau+1}} + E_0\left[\tilde{F}_{\tau-1}\right]$$

L-Planungsdoktrin:

$$V_0^F = \sum_{t=1}^{n} E_0\left[\widetilde{D}_t\right] \cdot \frac{\left((1-s_{IE}) \cdot (L(1-s_{IE}) + (1-L)(1-s_{KG}))\right)^{t-1}}{\left(1+k_S - m\left[s^Z L + s_{KG}(1-L)\right]\right)^t},$$

$$\text{wobei } s^Z = i\left[s^0(1-s_{IE}) - (s_{IF} - s_{IE})\right] + s_{IE}$$

… $s_{KG} = 0$; $s_{IE} = 0$; $s_{IF} = 0$:

$$V_0^F = \sum_{t=1}^{n} E_0\left[\widetilde{D}_t\right] \cdot \frac{1}{\left(1+k-mis^0L\right)^t}$$

→ Richter (1998)

Equity-Ansatz bei beliebigem Zahlungsmuster:

$$E_0^F = \sum_{t=1}^{n} \frac{E_0\left[\tilde{D}_t^{MF}\right](1-s_{IE})(1-s_{KG})^{t-1}}{\prod_{j=1}^{t}\left(1+k_{S,KG,j}^F\right)}$$

$$\text{mit } k_{S,KG,t}^F = k_S - s_{KG}m + \left(k_S - i\left\{1-s^0(1-s_{IE})-s_{IE}\right\} - s^Z m + s_{IE}\right)\cdot\frac{L_{t-1}}{1-L_{t-1}}$$

Aufgrund der Vermengung von absoluter und relativer Planungsdoktrin bekanntes Interdependenz-Problem („Zirkularitäts-Problem“)

Weitere DCF-Ansätze II

WACC-Ansatz bei beliebigem Zahlungsmuster:

$$E_0\left[\tilde{V}^F_{\tau-1}\right]=\frac{1-s_{IE}}{L(1-s_{IE})+(1-L)(1-s_{KG})}\cdot\sum_{t=\tau}^{n}\frac{E_0\left[\tilde{D}_t\right]}{\left(1+WACC_{KG}/[L(1-s_{IE})+(1-L)(1-s_{KG})]\right)^{t-\tau+1}}$$

mit $WACC_{KG}=k_S-L\left(ms^Z-s_{IE}\right)+(s_{KG}(1-m))(1-L)$

$WACC_{KG}$ lässt sich alternativ auch als Textbuch-Formel darstellen.

Weitere DCF-Ansätze III

Zu dieser WACC-Technik prinzipiell:

→ Clubb/Doran (1992) mit $s_{KG} \neq 0$ (jedoch Kursgewinn- und Einkommensteuereffekte nur partiell berücksichtigt)

→ Laitenberger (2003) mit $s_{KG} = 0$

Fazit:

- WACC-Ansatz für L-Doktrin nicht unbedingt nötig
- APV-Ansatz hier m.E. konzeptionell geradlinig
- Zusammenhang zwischen s_{KG} und dem Equity- bzw. WACC-Ansatz leider nicht intuitiv

Agenda IV

- Steuersystem
- Bewertung bei Eigenfinanzierung und Kapitalgewinnsteuer
- Wertabhängige Finanzierungspolitik
- Autonome Finanzierungspolitik

Autonome Finanzierungspolitik

APV-Ansatz

Fall der ewigen Rente

$$\Delta V_0^F = F_0 \cdot \left[1 - \frac{\left[i\left(1-s^0\right)-g\right]\cdot\left(1-s_{IE}\right)}{i\left(1-s_{IF}\right)-g\left(1-s_{KG}\right)} \right]$$

… und im Halbeinkünfteverfahren:

$$\Delta V_0^F = F_0 \left(1 - \frac{\left[i\left(1-s^0\right)-g\right]\left(1-0{,}5 s_I\right)}{i\left(1-s_I\right)-g\left(1-0{,}5 s_I\right)} \right)$$

Fall der ewigen Rente mit Wachstum – Halbeinkünfteverfahren I

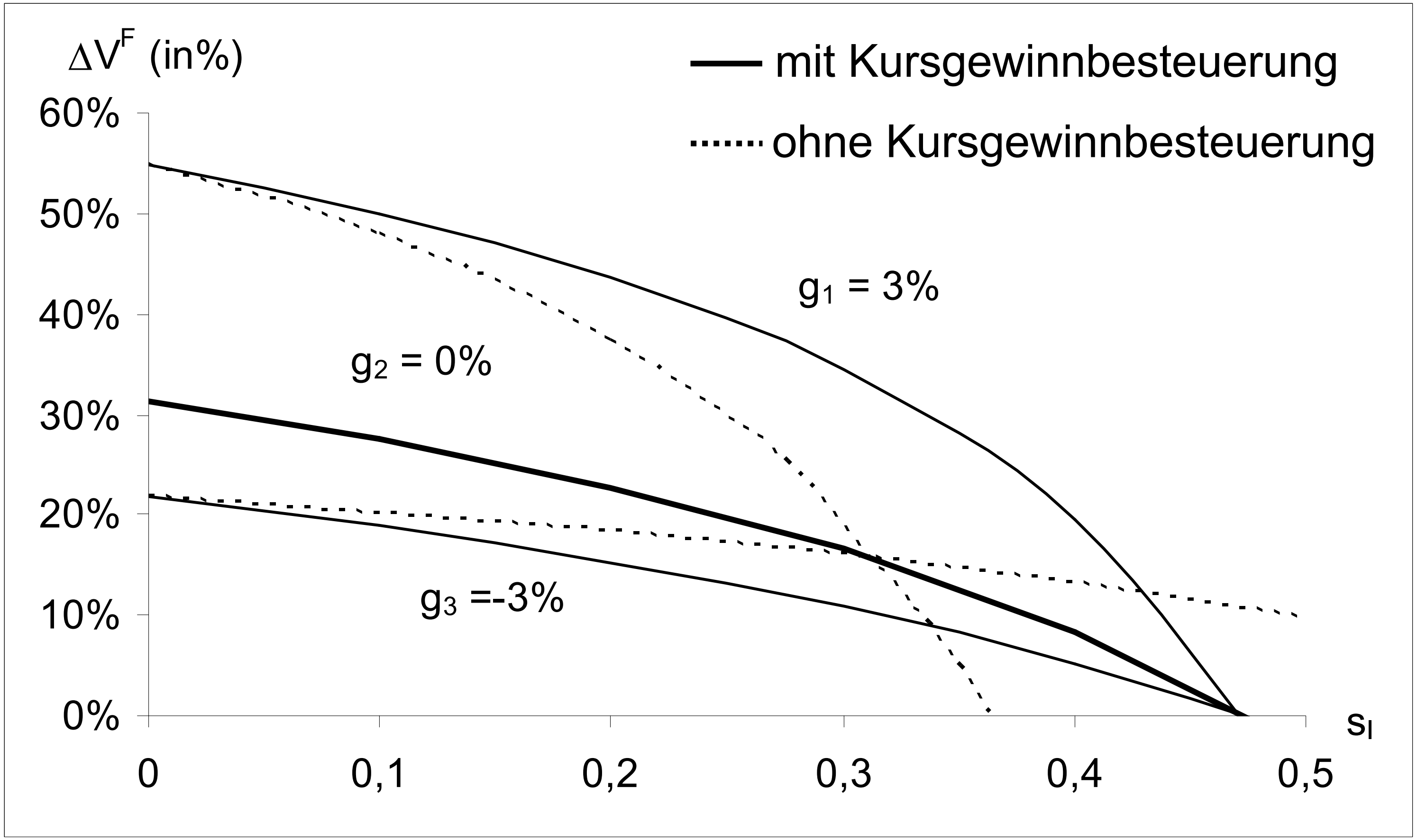


Abbildung 3: Marktbewertung des sicheren Steuervorteils der Fremdfinanzierung

Beobachtungen:

- Bei $g_2 = 0$ (fett gedruckte Linie) Kursgewinnbesteuerung kein Einfluss → Miller (1977), für HEV: Lobe (2001)
- Durch Kapitalgewinnsteuern **Verbreiterung** der Wertspanne bei **niedrigeren** Einkommensteuersätzen (bis ca. 40 %) gegenüber Fall ohne Kursgewinnbesteuerung
- Wachstum steuert den Werteinfluss der Kursgewinnbesteuerung (neutrale Wachstumsrate: 0 %)
- Reaktion der autonomen Politik **wesentlich sensibler** hinsichtlich Kursgewinnbesteuerung als Simulation zur wertabhängigen Politik

Beliebige Zahlungsmuster

$$E_0\left[\tilde{V}^F_{\tau-1}\right]=(1-s_{IE})\cdot\left\{\sum_{t=\tau}^{n}E_0\left[\tilde{D}_t\right]\cdot\frac{(1-s_{KG})^{t-\tau}}{(1+k_S-s_{KG}\cdot m)^{t-\tau+1}}\right.$$

$$\left.+\sum_{t=\tau}^{n}\left\{F_{t-1}\cdot\left[i\left(s^0-1\right)-1\right]+F_t\right\}\cdot\frac{(1-s_{KG})^{t-\tau}}{(1+i(1-s_{IF})-s_{KG})^{t-\tau+1}}\right\}+F_{\tau-1}$$

… s_{KG} = 0:

$$E_0\left[\tilde{V}^F_{\tau-1}\right]=(1-s_{IE})\cdot\left\{\sum_{t=\tau}^{n}E_0\left[\tilde{D}_t\right]\cdot\frac{1}{(1+k_S)^{t-\tau+1}}+\sum_{t=\tau}^{n}\left\{F_{t-1}\cdot\left[i\left(s^0-1\right)-1\right]+F_t\right\}\cdot\frac{1}{(1+i(1-s_{IF}))^{t-\tau+1}}\right\}+F_{\tau-1}$$

→ Drukarczyk (2003)

(→ Weitere DCF-Ansätze, s. Backup-Folien 34-37)

Fazit I

- (Einige) Lücken in der Literatur hinsichtlich der Berücksichtigung von Kapitalgewinnsteuern geschlossen

  - Persönliche Steuersätze (s_{KG}; s_{IE}; s_{IF}) dürfen unterschiedlich sein; Wertauswirkungen allgemeinerer Steuersysteme können analysiert werden.

  - Neutralität der persönlichen Besteuerung nicht vorausgesetzt

  - Absolute (F) und relative (L) Planungsdoktrinen berücksichtigt

  - Kursgewinn- und Einkommensteuereffekte vollständig erfasst

Fazit II

- Allgemeinere (Kapitalgewinnsteuern berücksichtigende) DCF-Formeln kompatibel mit dem bislang bekannten Wissenskorpus

- Werteinfluss im HEV insbesondere bei autonomer Finanzierungspolitik deutlich

Mehr-Perioden-Modell:

$$V_0^E = \sum_{t=1}^{n} E_0\left[\tilde{D}_t\left(1 - s_{IE}\right)\right] \cdot \frac{\left(1 - s_{KG}\right)^{t-1}}{\left(1 + k^*_{S,KG}\right)^t},$$

$$\text{wobei } k^*_{S,KG} = k_S - s_{KG} \cdot m \text{ und}$$

$$m = \frac{1 + k_S}{1 + i\left(1 - s_{IF}\right)}$$

→ Clubb/Doran (1992)

Auch erweiterbar auf im Zeitablauf schwankende Renditen $k_{S,t}$.

Zu Renditen:

Bei Unsicherheit i.d.R.:

$$E_0\left[\tilde{k}_{S,t}\right] \neq \frac{E_0\left[\tilde{D}_t(1-s_{IE})+\tilde{V}_t^E\right]}{E_0\left[\tilde{V}_{t-1}^E\right]}-1$$

Einfache unbedingt erwartete Rendite i.a. ungeeignet für Diskontierung.

Vgl. etwa Ingersoll (1987).

Geeignet für Diskontierung: **Gewichtete** unbedingt erwartete Rendite $E_0^w\left[\tilde{k}_{S,t}\right]$.

Gewichtung mit Wertanteilen $\dfrac{\tilde{V}_{t-1}^E}{E_0\left[\tilde{V}_{t-1}^E\right]}$

$$E_0^w\left[\tilde{k}_{S,t}\right] = \sum_{n=1}^{h} \frac{\tilde{V}_{n,t-1}^E}{E_0\left[\tilde{V}_{t-1}^E\right]} \cdot \underbrace{p_{n,t} \cdot \tilde{k}_{n,S,t}}_{E_0\left[\tilde{k}_{S,t}\right]} = \frac{E_0\left[\tilde{D}_t + \tilde{V}_t\right]}{E_0\left[\tilde{V}_{t-1}\right]} - 1$$

Hier: k_S deterministisch; jedoch $E_0^w\left[\tilde{k}_{S,KG}^F\right]$ und $E_0^w\left[W\tilde{A}CC_{KG}\right]$ stochastisch.

Equity-Ansatz bei ewiger Rente:

$$E_0^F = \frac{E_0\left[\widetilde{D}_1^{MF}\right](1 - s_{IE})}{E_0^w\left[\widetilde{k}_{S,KG}^F\right] - g \cdot (1 - s_{KG})}$$

mit $E_0^w\left[\widetilde{k}_{S,KG}^F\right] = k_{S,KG} + \left(k_{S,KG} - i(1 - s_{IF})\right) \cdot \left(1 - s_{KG}^*\right) \cdot \frac{F_{t-1}}{E_0\left[\widetilde{E}_{t-1}^F\right]}$

und $k_{S,KG} = k_S + s_{KG}[1 - m]$, $s_{KG}^* = 1 - \frac{\left[i\left(1 - s^0\right) - g\right] \cdot (1 - s_{IE})}{i(1 - s_{IF}) - g(1 - s_{KG})}$

WACC-Ansatz bei ewiger Rente:

$$V_0^F = \frac{E_0\left[\widetilde{D}_1\right](1 - s_{IE})}{E_0^w\left[\widetilde{WACC}_{KG}\right] - g(1 - s_{KG})}$$

mit $E_0^w\left[\widetilde{WACC}_{KG}\right] = k_{S,KG} - \left(k_{S,KG} - g(1 - s_{KG})\right) \cdot s_{KG}^* \cdot \frac{F_{t-1}}{E_0\left[\widetilde{V}_{t-1}^F\right]}$

und $k_{S,KG} = k_S + s_{KG}[1 - m]$, $s_{KG}^* = 1 - \frac{\left[i\left(1 - s^0\right) - g\right] \cdot (1 - s_{IE})}{i(1 - s_{IF}) - g(1 - s_{KG})}$

Literaturverzeichnis

Clubb, C.D.B./Doran, P. (1992), On the Weighted Average Cost of Capital with Personal Taxes, in: Accounting and Business Research, S. 44-48.

Drukarczyk, J. (2003), Unternehmensbewertung, 4. A., München.

Ingersoll, J.E. (1987), Theory of Financial Decision Making, Savage/Maryland.

Kruschwitz, L./Löffler, A. (2003), DCF (Part I), version from March 20.

Laitenberger, J. (2003), Kapitalkosten, Finanzierungsprämissen und Einkommensteuer, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, S. 1221-1239.

Lobe, S. (2001), Marktbewertung des Steuervorteils der Fremdfinanzierung und Unternehmensbewertung, in: Finanzbetrieb, S. 645-652.

Löffler, A. (2003), Das Standardmodell unter Unsicherheit ist ökonomisch unsinnig, Arbeitspapier Universität Hannover.

Miles, J.A./Ezzell, J.R. (1980): The Weighted Average Cost of Capital, Perfect Capital Markets, and Project Life: A clarification. In: Journal of Financial and Quantitative Analysis, S. 719-730.

Miller, M.H. (1977), Debt and Taxes, in: Journal of Finance, S. 261-275.

O´Brien, T.J. (1991), The Constant Growth Model and Personal Taxes, in: Journal of Business Finance & Accounting, S. 125-132.

Richter, F. (1998), Unternehmensbewertung bei variablem Verschuldungsgrad, in: Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft, S. 379-389.

Sick, G.A. (1990), Tax-Adjusted Discount Rates, in: Management Science, S. 1432-1450.

Taggart, R.A. Jr. (1991), Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions With Corporate and Personal Taxes, in: Financial Management, S. 8-20.

Zur Bewertung insolvenzbedrohter Unternehmen

Lutz Kruschwitz, Arnd Lodowicks*und Andreas Löffler†

Version vom 7. Juni 2004

Zusammenfassung

In dieser Arbeit soll der Einfluss der Insolvenz auf den Wert eines Unternehmens unter Unsicherheit studiert werden. Das hier vorgestellte Set von Annahmen führt zu dem überraschenden Ergebnis, dass die Möglichkeit des Default überhaupt keinen Einfluss auf den Unternehmenswert hat. Dieses Ergebnis gilt unabhängig von der verwendeten Finanzierungspolitik. Im Rahmen des vorliegenden Modells ist es nicht erforderlich, den Insolvenzauslöser explizit zu modellieren. An Hand eines Binomialbeispiels illustrieren wir unser Resultat für den Fall einer autonomen Finanzierung.

JEL: G31, H24

1 Problemstellung

In den letzten Jahren sind zahlreiche Arbeiten zur Unternehmensbewertung mit den Verfahren des Discounted Cashflows (DCF) erschienen. Dabei hat die Frage eine wesentliche Rolle gespielt, wie sich Steuervorteile quantifizieren lassen, die dadurch entstehen, dass Fremdkapitalzinsen bei den Gewinnsteuern des Unternehmens als Betriebsausgaben geltend gemacht werden dürfen. Mittlerweile ist als geklärt anzusehen, dass es in diesem Zusammenhang von erheblicher Bedeutung ist, welche Art von Finanzierungspolitik das zu bewertende Unternehmen betreiben wird.[1] Neben den traditionellen Formen der autonomen und der wertorientierten Finanzierung ist eine ganze Reihe weiterer Formen der Finanzierungspolitik genauer analysiert worden. Jedoch haben alle bisher diskutierten Finanzierungspolitiken eines gemeinsam: der Wert des Unternehmens erweist sich als um so größer, je höher der Verschuldungsgrad ist. Dafür gibt es eine unmittelbar einleuchtende Erklärung: die Steuervorteile nehmen bei gleich bleibenden Brutto–Cashflows mit steigenden Fremdkapitalzinsen zu.

Würde man nun allerdings der Geschäftsleitung eines Unternehmens empfehlen, sich so hoch wie nur möglich zu verschulden, riskierte man, nicht ernst genommen zu werden.

*Beide Lehrstuhl für Bank- und Finanzwirtschaft, Freie Universität Berlin, Boltzmannstr. 20, 14195 Berlin.

†Lehrstuhl für Banken und Finanzierung, Universität Hannover, Königsworther Platz 1, 30167 Hannover. Die Autoren danken dem *Verein zu Förderung der Zusammenarbeit von Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V.* für finanzielle Unterstützung und Hans-Jürgen Kirsch für wertvolle Anmerkungen.

[1] So etwa die Beiträge von (Richter 1997), (Wallmeier 1999) und (Richter & Drukarczyk 2001).

Denn man würde sich in diesem Fall einseitig auf steuerliche Argumente stützen und vollkommen außer Acht lassen, dass zunehmende Verschuldung auch negative Folgen hat, die mit steigenden Agenturkosten (agency costs) und Konkurskosten zu tun haben. Die Tatsache, dass diese Einflüsse in der aktuellen Literatur zur Theorie der Unternehmensbewertung weitgehend unbeleuchtet bleiben, hat zweifellos mehrere Gründe, die wir in diesem Beitrag (wenigstens teilweise) analysieren wollen. Ein nicht ganz unwichtiger Aspekt hat mit der Tatsache zu tun, dass Kredite in der Realität ausfallgefährdet sind und die Gefahr einer Insolvenz mit zunehmendem Verschuldungsgrad steigt. Im Gegensatz hierzu geht die große Mehrheit der bis heute diskutierten Bewertungskonzepte von risikolosen Krediten aus. So merken Modigliani & Miller (1958) einzig in einer Fußnote an, "... *Once we relax the assumption that all bonds have certain yields, ... we might perhaps expect heavily levered companies to sell at a slight discount* ..."[2] In diesem Beitrag wollen wir die Bewertung von Unternehmen unter der Voraussetzung betrachten, dass sie nicht in allen denkbaren künftigen Zuständen dazu in der Lage sind, die mit den Gläubigern vereinbarten Zahlungen vollständig zu leisten.

Eine solche Untersuchung ist nicht möglich, ohne dass Annahmen getroffen werden. Wir werden uns darum bemühen, unsere Annahmen präzise zu beschreiben und im Hinblick auf ihre Vereinbarkeit mit der Realität diskutieren. Aus diesen Annahmen werden wir die durchaus nicht nahe liegende Schlussfolgerung ziehen, dass ein insolvenzgefährdetes Unternehmen ganz genau denselben Wert besitzt wie ein Unternehmen, das überhaupt keiner Konkursgefahr ausgesetzt ist.[3]

Eine der frühesten Arbeiten, die sich mit Unternehmensbewertung bei ausfallgefährdetem Fremdkapital beschäftigt, ist Stiglitz (1969). Der Beitrag betrachtet ein Einperiodenmodell ohne Steuern und erweitert die Ergebnisse von Modigliani & Miller (1958) um ausfallgefährdetes Fremdkapital. Stiglitz (1974) verallgemeinert dieses Resultat auf ein mehrperiodiges Modell. Brennan & Schwartz (1978) untersuchen den Einfluss einer möglichen Insolvenz auf den Wert des Tax Shields. Dabei wird unterstellt, dass im Fall einer Insolvenz die gesamten Steuervorteile verloren gehen. Aus diesem Grund reduziert sich in ihrem Modell der Wert des Tax Shields mit zunehmendem Fremdkapitalbestand, wenn ein bestimmter Verschuldungsgrad erreicht beziehungsweise überschritten wird. In der Untersuchung von Tham & Wonder (2001) wird der Einfluss riskanten Fremdkapitals auf die Kapitalkosten betrachtet. Die Autoren zeigen in einem Zwei–Zeitpunkte–Modell, wie die relevanten Eigen– und Fremdkapitalkosten sowie die Kapitalkosten eines riskanten Tax Shields zu ermitteln sind. Auch hier wird bei Insolvenz von einem Totalverlust des Tax Shields ausgegangen. Damodaran (2002) stellt verschiedene Ansätze zur Integration von Ausfallrisiken in die Bewertungstheorie dar. Die Vorschläge umfassen unter anderem eine Modifizierung der DCF–Verfahren durch eine separate Bewertung verschiedener Insolvenz–Szenarios. Auch die Arbeit von Rapp (2003) beschäftigt sich mit dem Fall der Einbeziehung der Insolvenz in die DCF–Theorie von Unternehmen. Er beschränkt sich auf den Fall der marktwertorientierten Finanzierung und fragt

[2] Vgl. (Modigliani & Miller 1958, S. 274 Fußnote 18).

[3] (Modigliani & Miller 1958) haben mit einer strukturell ähnlichen Technik gezeigt, dass ein verschuldetes Unternehmen denselben Wert wie ein unverschuldetes Unternehmen besitzt.

danach, ob die Miles–Ezzell–Anpassungsformel[4] gültig bleibt.

Die genannten Arbeiten kommen zu Ergebnissen, die unseren Resultaten weitgehend entsprechen. Der hier vorliegende Beitrag unterscheidet sich von allen bisherigen Arbeiten durch vier wichtige Aspekte. Zum einen wird ein mehrperiodiges Modell betrachtet. Des Weiteren ignorieren wir die Existenz von Unternehmenssteuern nicht, sondern beziehen sie in die Analyse ein. Die vom Unternehmen verfolgte Finanzierungspolitik unterliegt in unserem Ansatz keinen Einschränkungen, wir setzen nicht notwendig eine marktwertorientierte oder autonome Finanzierung voraus. Zuletzt gelingt uns eine sehr weitreichende Aussage über den Wert insolvenzgefährdeter Unternehmen, ohne einen konkreten Insolvenzauslöser (wie etwa Zahlungsunfähigkeit oder Überschuldung) spezifizieren zu müssen. Bisher existiert in der Literatur kein Modell, das alle diese Aspekte bei der Diskussion um den Einfluss einer Insolvenz auf den Unternehmenswert berücksichtigt.

2 Das Modell

Wir unterscheiden verschiedene Zeitpunkte $t = 0, 1 \ldots$, die Zukunft ist unsicher. $\mathcal{F}_t$ stellt die im Zeitpunkt t verfügbare Information dar. Die Investoren bilden bedingte Erwartungen $\mathrm{E}\left[\cdot|\mathcal{F}_t\right]$ mit Hilfe einer subjektiven Wahrscheinlichkeit. Es wird unterstellt, dass auf der Ebene des Unternehmens (und nur dort) eine Ertragsteuer mit linearem Tarif erhoben wird. Der Steuersatz beträgt τ, er ist deterministisch und zeitlich konstant. Für den risikolosen Zins wollen wir r_f schreiben und nehmen an, dass auch dieser deterministisch und zeitlich konstant ist.

Am Kapitalmarkt werden Anteile eines verschuldeten und eines unverschuldeten Unternehmens gehandelt, die sich im gleichen Geschäftsfeld engagieren. Es wird weiter davon ausgegangen, dass das unverschuldete Unternehmen nicht insolvent werden kann. Die zu bewertenden Unternehmen erzielen im Zeitpunkt t einen Zahlungsüberschuss in Höhe von $\widetilde{\mathrm{CF}}_t$ aus operativer Tätigkeit nach Steuern. Wir werden $\widetilde{\mathrm{CF}}_t^l$ beziehungsweise $\widetilde{\mathrm{CF}}_t^u$ notieren, je nachdem ob wir es mit dem verschuldeten oder mit dem unverschuldeten Unternehmen zu tun haben. Den Wert des Unternehmens im Zeitpunkt t werden wir analog mit $\widetilde{\mathrm{V}}_t^l$ beziehungsweise $\widetilde{\mathrm{V}}_t^u$ bezeichnen.

Es sind mehrere Annahmen zu treffen, die wir deutlich ansprechen wollen und interpretieren müssen. Die beiden folgenden Annahmen sind für unser Modell von zentraler Bedeutung:

Annahme 1 (Arbitragefreiheit) *Der Kapitalmarkt ist arbitragefrei.*

Annahme 2 (Vollständiger Markt) *Die Zahlungsströme der zu bewertenden Unternehmen lassen sich durch Kauf beziehungsweise Verkauf von Finanztiteln, die am Kapitalmarkt gehandelt werden, perfekt duplizieren.*

[4] Vgl. (Miles & Ezzell 1980).

Aus der ersten Annahme folgt insbesondere die Existenz einer so genannten risikoneutralen Wahrscheinlichkeit Q. Die Folgerung aus der zweiten Annahme betrifft die Erwartungswerte der Cashflows bezüglich dieser Wahrscheinlichkeit Q. Nutzen die Investoren das Wahrscheinlichkeitsmaß Q und nicht ihr subjektives Wahrscheinlichkeitsmaß, so sind die erwarteten Cashflows mit dem risikolosen Zins zu diskontieren, um den fairen Preis des Unternehmens zu bestimmen. Daher gilt für das unverschuldete Unternehmen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\widetilde{V}_t^u = \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{E_Q\left[\widetilde{CF}_s^u | \mathcal{F}_t\right]}{(1+r_f)^{s-t}}. \tag{1}$$

Dieser Zusammenhang ist in der Literatur auch als Fundamentalsatz der Preistheorie bekannt.[5] Solange wir die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q nicht kennen, bleibt der Nutzen dieser Bewertungsgleichung begrenzt.

Wenden wir uns nun dem verschuldeten Unternehmen zu. Zuerst benötigen wir hier eine Prämisse, die klärt, wie und in welcher Weise die Brutto–Cashflows vor Zinsen und Steuern vom Ausmaß der Verschuldung und dem Insolvenzrisiko abhängen.

Annahme 3 (Identische Brutto–Cashflows) *Die Brutto–Cashflows* $\widetilde{GCF}_t$ *vor Steuern und Zinsen eines Unternehmens sind davon unabhängig, ob dieses Unternehmen verschuldet oder unverschuldet ist. Sie sind darüber hinaus davon unabhängig, ob das Unternehmen insolvenzgefährdet ist oder nicht.*

Diese Annahme besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil betrifft das Verhältnis von verschuldeten und unverschuldeten Unternehmen. Es entspricht ganz und gar der Tradition des *Modigliani–Miller*–Modells zu unterstellen, dass sich die Brutto–Cashflows von zwei Unternehmen nicht unterscheiden, wenn sie nur voneinander verschiedene Kapitalstrukturen besitzen.[6] Der zweite Teil betrifft das Verhältnis zweier Unternehmen, von denen das eine ausfallgefährdete Kredite besitzt, während die Kredite des anderen mit Sicherheit bedient werden können. Die hier unterstellte Unabhängigkeit der Brutto–Cashflows vom Insolvenzrisiko wollen wir eingehender diskutieren. Zu diesem Zweck betrachten wir ein Unternehmen, das sich so stark verschuldet, dass das Risiko einer Insolvenz nicht mehr ausgeschlossen werden kann.

Selbstverständlich haben finanzielle Schwierigkeiten Folgen für die Brutto–Cashflows eines Unternehmens. Häufig geben finanzielle Anspannungen sowohl für Lieferanten als auch für Kunden den Anlass, die Fortsetzung der Geschäftsbeziehungen mit dem angeschlagenen Unternehmen zu überprüfen. Manche Kunden springen ab oder kündigen langfristige Verträge; Lieferanten liefern möglicherweise nur noch gegen Vorkasse. Manager, die dem Unternehmen unter günstigeren Bedingungen treu bleiben würden, suchen sich einen anderen Arbeitgeber und entziehen dem in Not geratenden Unternehmen wichtiges Know–How, wodurch

[5] Vgl. (Beja 1971), (Harrison & Kreps 1979) und (Back & Pliska 1991).

[6] Vgl. (Rubinstein 2003).

sich die Krise verschärfen mag. In der Literatur pflegt man all die hier angedeuteten finanziellen Folgen einer starken Verschuldung als indirekte Insolvenzkosten zu bezeichnen. Neben den indirekten Insolvenzkosten gibt es noch die direkten Insolvenzkosten, welche durch die Abwicklung des Insolvenzverfahrens entstehen. Das sind insbesondere Gerichts- und Verwaltungskosten, die im Zuge einer Reorganisation oder Liquidation auftreten.[7]

Durch die von uns getroffene Annahme abstrahieren wir in unserem Modell von der Existenz solcher Insolvenzkosten. Ob Insolvenzkosten einen signifikanten Einfluss auf den Unternehmenswert haben, wird in der Literatur kontrovers diskutiert. Es wird jedoch einmütig die Auffassung vertreten, dass es schwierig sei, insbesondere die indirekten Insolvenzkosten zu quantifizieren.[8] Wollte man unsere Annahme durch eine realitätsnähere Prämisse ersetzen und gleichzeitig vermeiden, dass die neue Annahme unverbindlich bleibt, so müsste man allen Schwierigkeiten zum Trotz eine funktionale Beziehung zwischen Brutto-Cashflows und fortschreitender Verschuldung formulieren. Dazu sehen wir uns gegenwärtig nicht im Stande und werden diesen Weg daher nicht beschreiten.

Die Brutto-Cashflows eines Unternehmens haben in einem mehrperiodigen Modell zwei Komponenten: einerseits ihre Höhe und andererseits ihre zeitliche Dauer. Unsere Annahme besagt, dass zunehmende Verschuldung sich weder auf die Höhe noch auf die zeitliche Dauer der Brutto-Cashflows auswirkt. Nehmen wir zur Illustration an, dass ein Unternehmen bis zum Zeitpunkt T existieren wird, wenn es unverschuldet bleibt. Nehmen wir ferner an, dass es im Zeitpunkt $t < T$ insolvent wird, wenn es sich verschuldet. Dann schließt Annahme 3 nicht aus, dass die Situation durch Verkauf des Unternehmens bereinigt wird. Die Annahme zwingt jedoch zu der Vorstellung, dass das Unternehmen von seinen neuen Eigentümern bis zum Zeitpunkt T weiter betrieben wird. Selbstverständlich zahlen die neuen Eigentümer im Zeitpunkt t aber auch nur einen Preis, den sie angesichts der künftig noch zu erwartenden Cashflows für angemessen halten. Es ist unter dieser Voraussetzung somit nie sinnvoll, ein in Insolvenz geratenes Unternehmen zu liquidieren, wenn ein unverschuldetes Unternehmen im selben Zustand fortgeführt würde.[9]

Werfen wir nun die Frage auf, wie groß der Betrag ist, den die Eigentümer im Zeitpunkt t erhalten. Ausgangspunkt sind die Brutto-Cashflows des Unternehmens vor Zinsen und Steuern $\widetilde{\mathrm{GCF}}_t$. Um von hier zu den freien Cashflows zu kommen, müssen wir die (innenfinanzierten) Investitionen des Unternehmens und die Steuern abziehen. Nun ist zu klären, wie sich diese Größen voneinander unterscheiden, wenn wir es auf der einen Seite mit einem unverschuldeten, auf der anderen Seite mit einem verschuldeten und zugleich insolvenzgefährdeten Unternehmen zu tun haben. Wieder kommen wir nur mit einer Annahme weiter.

Annahme 4 (Investitionen und Abschreibungen) *Die Investitions- und Abschreibungspolitik des unverschuldeten Unternehmens unterscheidet sich nicht von der des verschuldeten Unternehmens. Auch Unternehmen, die insolvenzgefährdet sind, betreiben dieselbe Investitions-*

[7] Für einen Überblick zur Thematik Insolvenzkosten vgl. (Ross, Westerfield & Jaffe 2002, S. 422 ff.).

[8] Vgl. (Haugen & Senbet 1978), (Haugen & Senbet 1988) und (Altman 1984).

[9] Senbet & Seward (1995, S. 927 ff.) argumentieren, dass Liquidation und Insolvenz aus betriebswirtschaftlicher Sicht völlig unabhängig voneinander sind. Eine ähnliche Überlegung findet man bei (Hax 2004, S. 211 ff.).

und Abschreibungspolitik.

Wir bezeichnen die Investitionsausgaben mit $\widetilde{\mathrm{Inv}}_t$ und die Abschreibungen mit $\widetilde{\mathrm{AfA}}_t$. Beide Größen können unter Umständen unsicher sein, da wir nicht von der Vorstellung ausgehen wollen, dass die Investitionsplanung für alle Zeiten bereits in $t = 0$ erfolgt. Annahme 4 impliziert erstens, dass das Investitionsprogramm nicht durch eine mögliche Insolvenz beeinflusst wird und Manager unabhängig vom Verschuldungsgrad immer die gleichen Entscheidungen treffen.[10] Zweitens wird vorausgesetzt, dass die gesetzlichen Regelungen im Fall einer Insolvenz nicht eine Änderung der Abschreibungspolitik erzwingen. So können etwa Verlustvorträge auch im Falle einer Insolvenz unbegrenzt fortgeführt werden.[11]

Des weiteren werden wir uns im Folgenden der Vorstellung bedienen, dass Fremd– und Eigenkapitalgeber identische Informationen besitzen.

Annahme 5 (Homogene Erwartungen) *Alle Kapitalgeber haben bezüglich der künftigen Brutto–Cashflows und ihrer Verteilungen homogene Erwartungen.*

Gläubiger und Eigentümer benutzen das gleiche stochastische Modell der Cashflows. Wir gehen also davon aus, dass die Fremdkapitalgeber über das Unternehmen und seine zukünftige Entwicklung ebenso gut informiert sind wie die Geschäftsleitung. Diese Annahme muss sicher kritisch betrachtet werden. Man wird allerdings nicht umhin können, den Fremdkapitalgebern gewisse Informationen über das Unternehmen zuzugestehen: niemand leiht Geld aus, ohne sich vorher über die Geschäftsidee, die Risiken und die Marktchancen seines Vertragspartners genauer zu informieren. Trotzdem beschreiben asymmetrische Informationsverteilungen die Realität in aller Regel besser als unsere Annahme 5. Allerdings gilt: wer von dieser Annahme abweichen will, muss die Informationen sehr genau präzisieren, über die beide Seiten verfügen beziehungsweise nicht verfügen.

Wenden wir uns nun dem Verhältnis der Unternehmenswerte $\tilde{V}_t^u$ und $\tilde{V}_t^l$ zu und betrachten zunächst den Fall, bei dem die Gefahr einer Insolvenz ausgeschlossen ist.

2.1 Bewertung ohne Insolvenzrisiko

Aus den bisher getroffenen Annahmen lassen sich bereits erste Schlussfolgerungen ziehen. Die Steuern des unverschuldeten Unternehmens belaufen sich auf

$$\widetilde{\mathrm{Tax}}_t^u = \tau \left(\widetilde{\mathrm{GCF}}_t - \widetilde{\mathrm{AfA}}_t \right) .$$

[10]Drukarczyk (2002, S. 454) schreibt "Die zentrale Aufgabe eines Insolvenzen bewältigenden Regelsystems ist es, . . . die Beteiligten nach Eintritt der Insolvenz so handeln zu lassen, als träfe ein (rationaler) Investor die Entscheidung."

[11]So schreibt Wimmer (2002, S. 1241) im Frankfurter Kommentar zur Insolvenzordnung: "Durch §155 Abs. 1 InsO wird klargestellt, dass die Bestimmungen über insolvenzrechtliche Rechnungslegung die Buchführungs- und Rechnungslegungspflichten des Handels- und Steuerrecht unberührt lassen."

Haben wir es mit einem verschuldeten und nicht insolvenzgefährdeten Unternehmen zu tun, so dürfen die Zinsen von der Bemessungsgrundlage abgezogen werden, also

$$\widetilde{\mathrm{Tax}}_t^l = \tau \left(\widetilde{\mathrm{GCF}}_t - \widetilde{\mathrm{AfA}}_t - \widetilde{\mathrm{I}}_t\right) .$$

Das Fremdkapital $\widetilde{\mathrm{D}}_t$ wird jeweils revolvierend für eine Periode aufgenommen. Im Zeitpunkt $t + 1$ sind Zinsen in Höhe von $\widetilde{\mathrm{I}}_{t+1}$ zu zahlen. Weil die Zinsen von der Bemessungsgrundlage der Körperschaftsteuer abgezogen werden dürfen, erhöht sich der Betrag, welcher im Zeitpunkt t an die Financiers ausgeschüttet werden kann, um das Produkt aus Steuersatz und Zinszahlung $\tau\widetilde{\mathrm{I}}_t$. Aus unseren Annahmen folgt dann, dass sich die freien Cashflows des verschuldeten von denjenigen des unverschuldeten um genau diese Steuervorteile unterscheiden,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{CF}}_t^l &= \widetilde{\mathrm{GCF}}_t - \widetilde{\mathrm{Inv}}_t - \widetilde{\mathrm{Tax}}_t^l \\
&= \widetilde{\mathrm{GCF}}_t - \widetilde{\mathrm{Inv}}_t - \widetilde{\mathrm{Tax}}_t^u + \tau\widetilde{\mathrm{I}}_t \\
&= \widetilde{\mathrm{CF}}_t^u + \tau\widetilde{\mathrm{I}}_t .
\end{aligned} \tag{2}$$

Da der Fundamentalsatz der Preistheorie für jedes Unternehmen gültig ist, gleichgültig ob es verschuldet oder unverschuldet beziehungsweise insolvenzgefährdet oder nicht ausfallgefährdet ist, können wir den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{V}}_t^l &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_s^l | \mathcal{F}_t\right]}{(1+r_f)^{s-t}} \\
&= \widetilde{\mathrm{V}}_t^u + \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\tau\, \mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{I}}_s | \mathcal{F}_t\right]}{(1+r_f)^{s-t}}
\end{aligned} \tag{3}$$

festhalten.

Wenn Kredite nicht ausfallen können, vereinbaren die Gläubiger mit dem Unternehmen Zinsen in Höhe des risikolosen Zinssatzes. Damit gilt für die kontrahierten Zinsen

$$\widetilde{\mathrm{I}}_{t+1} = r_f\, \widetilde{\mathrm{D}}_t . \tag{4}$$

Wie viel Schulden $\widetilde{\mathrm{D}}_t$ das Unternehmen im Zeitpunkt t besitzt, hängt von der Finanzierungspolitik ab, die die Manager verfolgen. Wird beispielsweise eine autonome Finanzierungspolitik betrieben, so sind künftige Kreditaufnahme– und Kreditrückzahlungsbeträge bereits im Bewertungszeitpunkt festgelegt. Entscheidet sich die Unternehmensleitung dagegen für eine wertorientierte Finanzierungspolitik, so sind die (in Marktwerten gemessenen) Fremdkapitalquoten im Zeitpunkt der Bewertung fixiert. Gleichgültig aber, welche Politik nun im einzelnen verfolgt wird, können wir für den Wert eines verschuldeten Unternehmens immer

$$\widetilde{\mathrm{V}}_t^l = \widetilde{\mathrm{V}}_t^u + \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\tau r_f\, \mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{D}}_{s-1} | \mathcal{F}_t\right]}{(1+r_f)^{s-t}} . \tag{5}$$

notieren. Diese Darstellung erhalten wir durch schlichtes Einsetzen von Gleichung (4) in Gleichung (3).

Wer ein Unternehmen konkret zu bewerten hat, kommt mit dieser Gleichung nicht weit. Vielmehr müsste er nun doch wissen, welche Finanzierungspolitik das Unternehmen verfolgt, und er müsste ferner dazu in der Lage sein, die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen. An anderer Stelle ist für verschiedene Formen von Finanzierungspolitik im Detail beschrieben worden, wie vorzugehen ist, um aus der allgemeinen Bewertungsgleichung (5) praktisch handhabbare Bewertungskonzepte abzuleiten, die auf den jeweils relevanten Fall einer konkreten Finanzierungspolitik zugeschnitten sind.[12] Auf Details dieser Art können wir im vorliegenden Zusammenhang jedoch verzichten, weil die allgemeine Bewertungsgleichung (5) bereits ausreicht, um Einflüsse zu studieren, welche aus der Gefahr einer Insolvenz erwachsen.

2.2 Bewertung mit Insolvenzrisiko

Wenden wir uns nun dem wirklichkeitsnäheren Fall zu, dass das Fremdkapital des Unternehmens ausfallgefährdet ist. Zuerst wäre zu klären, was wir unter der Insolvenz eines Unternehmens verstehen. Das deutsche Insolvenzrecht unterscheidet verschiedene Ereignisse, die zur Auslösung eines Insolvenzverfahrens führen können: Neben der Zahlungsunfähigkeit (§ 17 InsO) sind das die drohenden Zahlungsunfähigkeit (§ 18 InsO) und die Überschuldung (§ 19 InsO). Eine Vielzahl der Beiträge, die sich mit ausfallgefährdetem Fremdkapital beschäftigen, greift auf Überschuldung als Insolvenzauslöser zurück.[13] Wir können im allgemeinen Teil dieser Arbeit offen lassen, welcher Tatbestand die Insolvenz auslöst. Für unser Modell ist nur eine genaue Beschreibung der Insolvenzfolgen wichtig.

Wir betrachten Unternehmen, die in der Rechtsform von Kapitalgesellschaften betrieben werden. Für solche Unternehmen ist typisch, dass die Eigentümer für Schulden des Unternehmens nicht mit ihrem Privatvermögen haften.

Annahme 6 (Keine Privathaftung) *Für die Befriedigung der Zahlungsansprüche von Kapitalgebern stehen ausschließlich die Cashflows des Unternehmens zur Verfügung. Privathaftung ist ausgeschlossen.*

Bei verschuldeten Unternehmen, die Steuern zahlen müssen, gibt es immer (mindestens) zwei Gläubiger, den eigentlichen Kreditgeber und die Finanzbehörde. Wir gehen davon aus, dass die Ansprüche des Fiskus Vorrang genießen und in jedem Fall auch befriedigt werden können. Die Insolvenz ist in unserem Modell also niemals so dramatisch, dass der Fiskus einen Teil seiner Ansprüche verliert.[14]

[12] Siehe Kruschwitz & Löffler (2003, chapter 1.3.3) oder Rapp (2003).

[13] So etwa (Merton 1974), (Black & Cox 1976), (Brennan & Schwartz 1978), (Leland 1994), (Longstaff & Schwartz 1995), (Anderson & Sundaresan 1996), (Schöbel 1999), (Fan & Sunderasan 2000) und (Goldstein, Ju & Leland 2001). (Uhrig-Homburg 2001) modelliert zusätzlich Zahlungsunfähigkeit als Konkursauslöser. Einen guten Überblick zu diesem Thema verschafft (Uhrig-Homburg 2002).

[14] Es wird also unterstellt, dass die Steuerforderungen gegenüber den Forderungen aller anderen Gläubiger immer Vorrang genießen. Nach geltendem Recht sind die Dinge komplizierter. Für die insolvenzrechtliche Einord-

Annahme 7 (Rangordnung der Gläubiger) *Die Ansprüche der Finanzbehörde rangieren vor den Ansprüchen der anderen Kreditgeber. Die Cashflows reichen immer aus, um wenigstens die Steuerschulden vollständig zu begleichen.*

Die bisher eingeführte Notation reicht für die im folgenden anzustellenden Überlegungen nicht aus. Gehen wir einmal davon aus, dass das Unternehmen im Zeitpunkt t Kredit in Höhe von $\widetilde{\mathrm{D}}_t$ aufnehmen will und die Kreditgeber diesen Betrag tatsächlich gewähren. Im vorigen Abschnitt bezeichnete die Variable $\widetilde{\mathrm{D}}_t$ zwei unterschiedliche Dinge, nämlich zum einen den Kredit, den das Unternehmen im Zeitpunkt t aufnimmt, und zum anderen den Betrag, welchen es neben den Zinsen im Zeitpunkt $t+1$ wieder zurückzahlt. Jetzt bezeichnet $\widetilde{\mathrm{D}}_t$ nur noch den ersten Tatbestand, die Tilgungsleistung sei $\widetilde{\mathrm{D}}_t^{\diamond} \leq D_t$. Die im Zeitpunkt $t+1$ zufließenden Zinsen sind (unabhängig davon, ob eine Insolvenz eingetreten ist oder nicht) wieder $\widetilde{\mathrm{I}}_{t+1}$.

Kommt es zur Insolvenz, so reicht die Insolvenzmasse nicht aus, die fälligen Schulden zu begleichen. Es wird davon ausgegangen, dass Kredite, die im Zeitpunkt der Insolvenz aufgenommen werden, vollständig zur Bedienung der alten Gläubiger verwendet werden. Frisches Fremdkapital fließt somit zu 100 % in die Insolvenzmasse ein. Nun könnte man kritisch anmerken, dass die Bereitschaft von Kreditgebern, einem insolventen Unternehmen weiteren Kredit zu gewähren, gering ist. In unserem Modell orientieren sich die Kreditgeber jedoch nicht an den Erfahrungen, die sie im Zeitpunkt der Insolvenz machen, sondern an den Zahlungen, die sie ein Jahr später erwarten. Das Unternehmen händigt den Gläubigern im Zeitpunkt $t+1$ somit die verfügbaren Mittel in Höhe von $\widetilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \widetilde{\mathrm{D}}_t^{\diamond} = \mathrm{D}_{t+1} + \widetilde{\mathrm{CF}}_{t+1}^{l}$ aus. Mehr ist nicht vorhanden und Privathaftung wurde ausgeschlossen.

Wird nun einzig das Verhältnis zwischen dem zu bewertenden Unternehmen und seinem Kreditgeber betrachtet, so ist es gleichgültig, wie die vorhandenen Cashflows auf die fälligen Zins- und Tilgungsleistungen aufgeteilt werden.[15] Im Verhältnis zur Finanzbehörde ist das jedoch anders, weil Zinsen die Bemessungsgrundlage mindern, Tilgungsleistungen dagegen nicht.

Wir gehen davon aus, dass die Finanzbehörde damit einverstanden ist, dass Zinsen in Höhe von $\widetilde{\mathrm{I}}_{t+1}$ steuermindernd geltend gemacht werden. Andererseits besteht sie aber darauf, dass der Schuldenerlass in Höhe von $\widetilde{\mathrm{D}}_t - \widetilde{\mathrm{D}}_t^{\diamond}$ als Sanierungsgewinn versteuert wird.[16] Im Insol-

nung der Steuerforderungen im Verhältnis zu den Forderungen beispielsweise der Kreditgeber ist der Zeitpunkt des "Begründetseins" (vereinfacht: vor oder nach Eröffnung des Insolvenzverfahrens) ausschlaggebend. "Steuerforderungen, die zum Zeitpunkt der Eröffnung des Insolvenzverfahrens begründet sind, sind als Insolvenzforderungen nach § 174 Abs. 1 InsO beim Insolvenzverwalter anzumelden. ... Zu den sonstigen Massverbindlichkeiten i.S.d. § 55 InsO gehören die Steuern, ..., die durch Handlungen des Insolvenzverwalters entstanden sind.", Wimmer (2002, S. 1270 f.).

[15] Wenn der Kreditvertrag keine ausdrückliche Regelung enthält, darf der Schuldner bestimmen, ob und inwieweit es sich bei Teilzahlungen um Zinsen oder um Tilgungsleistungen handeln soll (§ 366 f. BGB).

[16] Tilgungsausfälle sind auch bei Insolvenz ertragswirksam, denn nach § 11 KStG Nr. 7 sind in diesem Fall weiterhin "die verbleibenden Vermögensgegenstände und Schulden in der handelsrechtlichen Zwischenbilanz nach den steuerlichen Vorschriften zu bewerten" Pink (1995, S. 206). Der inzwischen aufgehobene § 3 Nr. 66 EStG stellte Sanierungsgewinne unter bestimmten Voraussetzungen explizit steuerfrei. Nach einem Schreiben des

venzfall werden die nicht geleisteten Tilgungszahlungen somit als Buchgewinne angesehen und erhöhen dementsprechend die Bemessungsgrundlage.[17] Mit dieser Spezifikation gilt für die Steuern des verschuldeten und zugleich insolvenzgefährdeten Unternehmens im Zeitpunkt t

$$\widetilde{\mathrm{Tax}}^l_{t+1} = \tau \left(\widetilde{\mathrm{GCF}}_{t+1} - \widetilde{\mathrm{AfA}}_{t+1} - \tilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \tilde{\mathrm{D}}_t - \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_t \right) .$$

Da sich die Steuergleichung des unverschuldeten Unternehmens nicht ändert, erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{CF}}^l_{t+1} &= \widetilde{\mathrm{GCF}}_{t+1} - \widetilde{\mathrm{Inv}}_{t+1} - \widetilde{\mathrm{Tax}}^l_{t+1} \\ &= \widetilde{\mathrm{GCF}}_{t+1} - \widetilde{\mathrm{Inv}}_{t+1} - \widetilde{\mathrm{Tax}}^u_{t+1} + \tau \left(\tilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_t - \tilde{\mathrm{D}}_t \right) \\ &= \widetilde{\mathrm{CF}}^u_{t+1} + \tau \left(\tilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_t - \tilde{\mathrm{D}}_t \right) . \end{aligned} \tag{6}$$

Der Fundamentalsatz der Preistheorie ist auch für das verschuldete und insolvenzgefährdete Unternehmen gültig. Daher können wir den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{V}}^l_t &= \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\mathrm{E}_Q \left[\widetilde{\mathrm{CF}}^l_s | \mathcal{F}_t \right]}{(1+r_f)^{s-t}} \\ &= \tilde{\mathrm{V}}^u_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\tau\, \mathrm{E}_Q \left[\tilde{\mathrm{I}}_s + \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_{s-1} - \tilde{\mathrm{D}}_{s-1} | \mathcal{F}_t \right]}{(1+r_f)^{s-t}} \end{aligned} \tag{7}$$

notieren.

Auch die Gläubiger verhalten sich rational. Sie haben dem Unternehmen Kredit gewährt und werden, unabhängig davon, ob eine Insolvenz eintritt oder nicht, im Zeitpunkt t die Zinsen $\tilde{\mathrm{I}}_t$ und die Tilgung $\tilde{\mathrm{D}}^\diamond_{t-1}$ erhalten. Da unter der Bedingung eines arbitragefreien Marktes auch für die Gläubiger der Fundamentalsatz der Preistheorie gilt, folgt daraus[18]

$$\tilde{\mathrm{D}}_t = \frac{\mathrm{E}_Q \left[\tilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_t | \mathcal{F}_t \right]}{1+r_f} ,$$

woraus wir ohne weiteres

$$\mathrm{E}_Q \left[(1+r_f) \tilde{\mathrm{D}}_t | \mathcal{F}_t \right] = \mathrm{E}_Q \left[\tilde{\mathrm{I}}_{t+1} + \tilde{\mathrm{D}}^\diamond_t | \mathcal{F}_t \right]$$

ableiten können. Einsetzen in Gleichung (7) ergibt

$$\tilde{\mathrm{V}}^l_t = \tilde{\mathrm{V}}^u_t + \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{\tau r_f\, \mathrm{E}_Q \left[\tilde{\mathrm{D}}_{s-1} | \mathcal{F}_t \right]}{(1+r_f)^{s-t}} .$$

Diese Gleichung ist nicht von Gleichung (5) zu unterscheiden, bei der wir Insolvenzrisiken ausgeschlossen hatten! Daraus folgt, dass die Einbeziehung des Insolvenzrisikos unter den

BMF vom 27. März 2003 können Sanierungsgewinne unter bestimmten Voraussetzungen erlassen oder gestundet werden. In der Steuerpraxis wird derzeit diskutiert, ob dieses Verfahren rechtens ist, vgl. (Janssen 2003).

[17] Siehe hierzu beispielsweise Janssen (2003, S. 1056).

[18] Vgl. dazu auch Rapp (2003), Fußnote 55.

von uns getroffenen Annahmen keinerlei Einfluss auf den Unternehmenswert hat. Bezieht sich die Finanzierungspolitik auf die gewährten Kreditbeträge, so brauchen wir bei den Bewertungsgleichungen nicht zu unterscheiden, ob Insolvenzrisiken gegeben sind oder nicht. Die bloße Möglichkeit der Insolvenz ändert absolut nichts an den Bewertungsgleichungen.

Wenn man dieses Ergebnis ernst nimmt, so scheint auch bei gegebenem Insolvenzrisiko die Berechnung von Unternehmenswerten mit der DCF–Theorie zu gelingen. Selbstverständlich muss geprüft werden, ob im Falle von Insolvenzrisiken die Voraussetzungen der Theorie immer noch erfüllt sind. Und genau hier könnten sich Probleme ergeben: wenn die Gefahr besteht, dass das Unternehmen insolvent wird, so kann es passieren, dass die Gläubiger Kredit nicht in demselben Umfang gewähren wollen, wie das ohne Insolvenzrisiko der Fall wäre. Eine Finanzierungspolitik, die unter Vernachlässigung von Insolvenzrisiken vereinbart wurde, kann dann unter Berücksichtigung dieser Risiken nicht mehr aufrecht erhalten werden. Wenn sich aber die Finanzierungspolitiken mit und ohne Einbeziehung des Insolvenzrisikos unterscheiden, dann stimmen natürlich auch die entsprechenden Unternehmenswerte nicht mehr überein.

Die Botschaft der Arbeit lässt sich also wie folgt zusammenfassen: die Probleme der Bewertung von Unternehmen bei Anwesenheit von Insolvenzrisiko bestehen nicht darin, dass die DCF–Theorie versagt. Im Gegenteil, diese Theorie bleibt weiterhin gültig. Die Schwierigkeiten der Berücksichtigung von Insolvenzrisiken liegen vielmehr darin, dass die für das Unternehmen relevanten Finanzierungspolitiken mit mehr Bedacht formuliert werden müssen.

3 Ein Zahlenbeispiel

3.1 Bewertung ohne Insolvenzrisiko

Betrachten wir ein unverschuldetes Unternehmen, dessen freie Cashflows nach Körperschaftsteuer sich wie in Abbildung 1 entwickeln. Die Auf– und Ab–Bewegungen in jedem Knoten seien gleich wahrscheinlich. Nach dem Zeitpunkt $t = 3$ stellt das Unternehmen seine Tätigkeit ein. Ein besonderer Liquidationserlös fällt nicht an.

Wir hatten vorausgesetzt, dass der Kapitalmarkt arbitragefrei ist. Der risikolose Zins beträgt $r_f = 10\,\%$, der Steuersatz ist $\tau = 35\,\%$. Des weiteren existiert eine risikoneutrale Wahrscheinlichkeit Q derart, dass alle erwarteten Renditen unter Q dem risikolosen Zins entsprechen. Für die Entwicklung unseres Beispiels haben wir nun zwei Möglichkeiten.

Wir könnten zum einen die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q für jeden Zweig in unserem Modell explizit voraussetzen. Daraus würden sich dann die Unternehmenswerte des unverschuldeten Unternehmens in jedem Knoten ergeben und wir könnten auf dieser Grundlage die tatsächlich erwarteten Renditen des Unternehmens bestimmen. Zum anderen könnten wir aber auch die tatsächlich erwarteten Renditen des Unternehmens vorgeben und müssten dann aus ihnen die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q ableiten. Da beide Wege zum selben Ziel führen müssen, wenn es sich um ein konsistentes Modell handelt, kann die Wahl

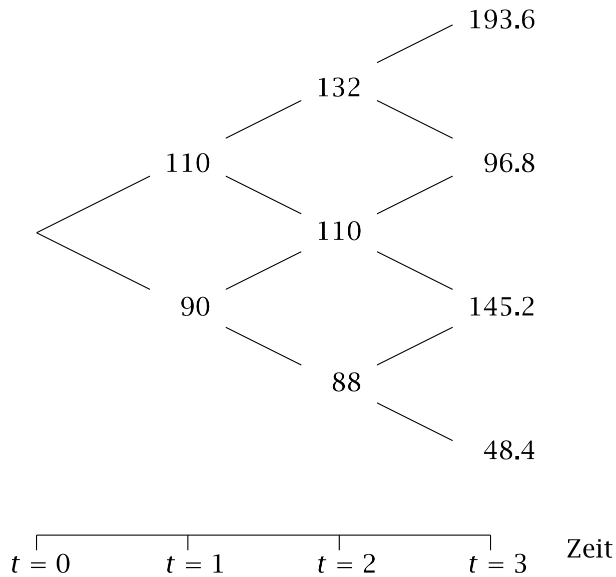


Abbildung 1: Freie Cashflows eines unverschuldeten Unternehmens.

zwischen den beiden Möglichkeiten willkürlich erfolgen. Wir werden, weil die Diskussion für unsere Argumente nebensächlich ist, sowohl die erwarteten Renditen des unverschuldeten Unternehmens als auch die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten Q angeben und anhand eines Beispiels zeigen, dass beide Größen ein konsistentes Modell ergeben.

Abbildung 2 zeigt die jeweiligen (bedingten) Aufwärts–Wahrscheinlichkeiten Q in unserem Binomialbaum. Die Abwärtswahrscheinlichkeiten müssen so gewählt werden, dass sich beide Größen zu eins addieren. Konzentrieren wir uns auf den unteren Knoten in $t = 2$. Nach dem Fundamentalsatz der Preistheorie folgt beispielsweise für den Unternehmenswert in diesem Knoten (*dd* steht für *down–down*, also zwei Abwärtsbewegungen)

$$\widetilde{V}_2^u(dd) = \frac{0.4565 \cdot 145.2 + (1 - 0.4565) \cdot 48.4}{1 + 10\,\%} \approx 84.1739$$

Daraus ergibt sich eine tatsächlich erwartete Rendite von 15 %,

$$\frac{\mathrm{E}\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_3^u | dd\right]}{\widetilde{V}_2^u(dd)} - 1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 145.2 + \frac{1}{2} \cdot 48.4}{84.1739} - 1 = 15\,\%.$$

Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten haben wir in diesem Beispiel so gewählt, dass die tatsächlich erwarteten Renditen in allen Knoten jeweils $k = 15\,\%$ betragen.

Der Wert des unverschuldeten Unternehmens ist dann

$$\begin{aligned} V_0^u &= \frac{\mathrm{E}\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_1^u\right]}{1+k} + \frac{\mathrm{E}\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_2^u\right]}{(1+k)^2} + \frac{\mathrm{E}\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_3^u\right]}{(1+k)^3} \\ &= \frac{100}{1+0.15} + \frac{110}{(1+0.15)^2} + \frac{121}{(1+0.15)^3} \approx 249.69\,. \end{aligned}$$

Das verschuldete Unternehmen verfolge eine Politik, die autonom sei. Insbesondere werde die Tilgung so geplant, dass sich die folgenden Fremdkapitalbestände ergeben

$$\mathrm{D}_0 = 150, \qquad \mathrm{D}_1 = 90, \qquad \mathrm{D}_2 = 5\,.$$

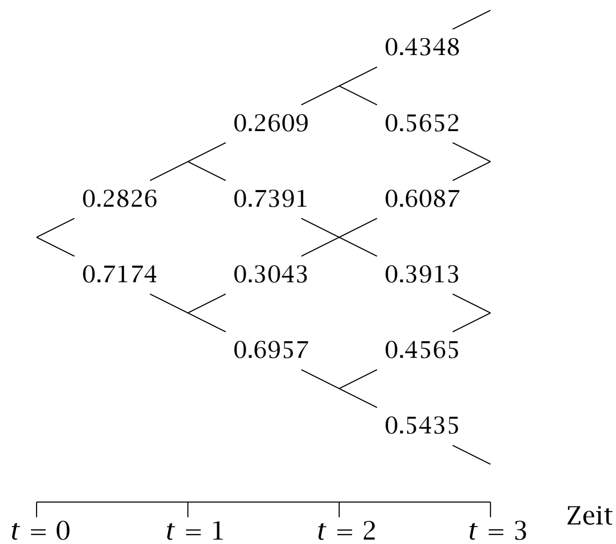


Abbildung 2: Bedingte risikoneutrale Wahrscheinlichkeiten $Q(\cdot|\cdot)$.

Liegt kein Insolvenzrisiko vor, dann bestimmt sich der Wert des verschuldeten Unternehmens anhand der APV–Gleichung. Der Wert des unverschuldeten Unternehmens ist dann

$$\begin{aligned} V_0^l &= V_0^u + \frac{r_f \tau \mathrm{D}_0}{1+r_f} + \frac{r_f \tau \mathrm{D}_1}{(1+r_f)^2} + \frac{r_f \tau \mathrm{D}_3}{(1+r_f)^3} \\ &= 249.69 + \frac{0.1 \cdot 0.35 \cdot 150}{1+0.1} + \frac{0.1 \cdot 0.35 \cdot 90}{(1+0.1)^2} + \frac{0.1 \cdot 0.35 \cdot 5}{(1+0.1)^3} \approx 257.20 \end{aligned}$$

Wenden wir uns nun einer Bewertung mit Insolvenzrisiko zu.

3.2 Bewertung mit Insolvenzrisiko

Um in unserem Zahlenbeispiel das Insolvenzrisiko berücksichtigen zu können, müssen wir zuerst den Insolvenzauslöser bestimmen. Wir wollen hier davon ausgehen, dass ausschließlich Zahlungsunfähigkeit die Insolvenz auslösen kann. Überschuldung oder drohende Zahlungsunfähigkeit werden wir ignorieren. Konzentrieren wir uns dazu weiter auf die Zahlungen, die den Eigenkapitalgebern zufließen. Insolvenz tritt nach unserem Verständnis ein, wenn in einem Zustand ω und bei risikolosen Zinsen

$$\widetilde{\mathrm{CF}}_t^l(\omega) < r_f \, \mathrm{D}_{t-1} + \mathrm{D}_{t-1} - \mathrm{D}_t$$

gilt. Setzen wir den Zusammenhang zwischen den Cashflows des unverschuldeten und des verschuldeten, aber noch nicht insolvenzgefährdeten Unternehmens (2) ein, so gewinnen wir die Ungleichung

$$\widetilde{\mathrm{CF}}_t^u(\omega) < (1-\tau) \, r_f \, \mathrm{D}_{t-1} + \mathrm{D}_{t-1} - \mathrm{D}_t .$$

Ein Blick auf den Binomialbaum offenbart nun, dass es im Zeitpunkt $t = 2$ im Zustand *dd* zu einer Insolvenz des Unternehmens kommen wird: die Eigenkapitalgeber hätten in diesem

Zustand Zahlungs“ansprüche” in Höhe von -2.9. Um den Unternehmenswert unter Berücksichtigung dieser Insolvenz berechnen zu können, müssen wir nun zwei Dinge tun: Zuerst müssen die freien Cashflows des insolvenzgefährdeten Unternehmens bestimmt werden; anschließend müssen diese Cashflows mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bewertet werden. Wenden wir uns der ersten Aufgabe zu.

Um die freien Cashflows des verschuldeten Unternehmens zu ermitteln, bedienen wir uns der Gleichung (6). Dabei scheinen uns allerdings noch Informationen über die Höhe der geleisteten Zins- und Tilgungszahlungen zu fehlen. Es wird sich allerdings zeigen, dass die Höhe der Cashflows von einer solchen Aufteilungsregel unabhängig ist.

Nach unseren Voraussetzungen besitzen alle Financiers identische Informationen. Also wird das Risiko der Insolvenz nicht nur von den Eigenkapitalgebern, sondern auch den Fremdkapitalgebern korrekt vorausgesehen. In allen Zuständen außer dd können die Eigenkapitalgeber den Zinsforderungen der Financiers nachkommen. Daher wird in allen Zuständen außer d ein risikoloser Zins vereinbart.

Im Zustand dd können die Fremdkapitalgeber nicht die risikolosen Zinsen und die entsprechende Tilgungsleistung erwarten. Ihnen stehen nur die Cashflows $\widetilde{\mathrm{CF}}_2^l$ und die neu gewährten Kredite D_2 zur Verfügung. Wir werden uns hierbei nur auf die Berechnung der Summe $\widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond + \widetilde{\mathrm{I}}_2$ und nicht der einzelnen Bestandteile $\widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond$ und $\widetilde{\mathrm{I}}_2$ konzentrieren, da nur diese Summe zur Ermittlung der freien Cashflows notwendig ist. Aufgrund der Insolvenz im Zustand dd gilt zuerst

$$\widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond(dd) + \widetilde{\mathrm{I}}_2(dd) = \widetilde{\mathrm{CF}}_2^l(dd) + D_2\,.$$

Und da die Fremdkapitalgeber dies bereits im Zustand d eine Periode vorher antizipieren, werden sie im Zustand du dafür eine Entschädigung (in Form eines höheren Nominalzinses) erwarten. Um die Zahlung im Zustand du zu ermitteln, nutzen wir aus, dass sich die Kreditgeber rational verhalten. Wenn sie in $t = 1$ einen Kredit in Höhe von D_1 vergeben, dann gilt für die Rückzahlungen aus diesem Kredit auch der Fundamentalsatz der Preistheorie. Das heißt nichts anderes als

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\left(\widetilde{\mathrm{I}}_2(dd) + \widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond(dd)\right) Q(d|d) + \left(\widetilde{\mathrm{I}}_2(du) + \widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond(du)\right) Q(u|d)}{1 + r_f} \\ &= \frac{\left(\widetilde{\mathrm{CF}}_2^l(dd) + D_2\right) Q(d|d) + \left(\widetilde{\mathrm{I}}_2(du) + \widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond(du)\right) Q(u|d)}{1 + r_f}\,, \end{aligned}$$

woraus

$$\widetilde{\mathrm{I}}_2(du) + \widetilde{\mathrm{D}}_1^\diamond(du) = \frac{(1 + r_f)D_1 - \left(\widetilde{\mathrm{CF}}_2^l(dd) + D_2\right) Q(d|d)}{Q(u|d)}$$

folgt.

Insgesamt können wir bisher festhalten, dass die Summe aus Zins und Tilgung folgende

Forderung erfüllen muss,

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{\diamond}_{t-1} + \widetilde{\mathrm{I}}_t = \begin{cases} \widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2(dd) + D_2, & \text{im Zustand } dd, \\ \frac{(1+r_f)D_1 - \left(\widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2(dd)+D_2\right)Q(d|d)}{Q(u|d)}, & \text{im Zustand } du, \\ (1+r_f)D_{t-1}, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{8}$$

Der Vollständigkeit halber seien noch die freien Cashflows des verschuldeten Unternehmens in den Zuständen dd und du bestimmt. Im Zustand dd gilt neben der Bedingung (8) noch der Zusammenhang (6) zwischen den freien Cashflows des verschuldeten und des unverschuldeten Unternehmens. Einsetzen führt auf eine Gleichung in der Unbekannten $\widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2$ mit der Lösung

$$\widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2(dd) = \widetilde{\mathrm{CF}}^{u}_2(dd) + \tau\left(\widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2(dd) + D_2 - D_1\right) \Longrightarrow \widetilde{\mathrm{CF}}^{l}_2(dd) = \frac{1}{1-\tau}\left(\widetilde{\mathrm{CF}}^{u}_2(dd) + \tau(D_2 - D_1)\right)$$

Damit vereinfacht sich (8) zu

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{\diamond}_{t-1} + \widetilde{\mathrm{I}}_t = \begin{cases} \frac{\widetilde{\mathrm{CF}}^{u}_2(dd)+\tau(D_2-D_1)}{1-\tau}, & \text{im Zustand } dd, \\ \frac{(1+r_f)D_1 - \left(\frac{\widetilde{\mathrm{CF}}^{u}_2(dd)+\tau(D_2-D_1)}{1-\tau}+D_2\right)Q(d|d)}{Q(u|d)}, & \text{im Zustand } du, \\ (1+r_f)D_{t-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir die gegebenen Größen ein, so erhalten wir im Zustand $t = 2$

$$\widetilde{\mathrm{D}}^{\diamond}_1 + \widetilde{\mathrm{I}}_2 \approx \begin{cases} 99, & \text{in den Zuständen } uu \text{ und } ud; \\ 109.02, & \text{im Zustand } du; \\ 89.62, & \text{im Zustand } dd. \end{cases}$$

Wir haben die Ergebnisse unserer Überlegungen zu den Zins- und Tilgungszahlungen und den daraus resultierenden freien Cashflows in Abbildung 3 zusammengefasst. Man beachte insbesondere, dass die Cashflows in den Zuständen du und ud nicht mehr identisch sind. Die Cashflows sind nicht rekombinierend. In einem Fall bestand ja das Risiko einer Insolvenz, im anderen Fall konnte dagegen der risikolose Zins vereinbart werden. Auch ist weiter zu beachten, dass die hohen Zahlungen im Zustand du entsprechend hohe Steuervorteile zur Folge haben. Im Zustand dd hingegen sind die Cashflows aufgrund der modifizierten Bemessungsgrundlage geringer als bei einem unverschuldeten Unternehmen.

Um das Ausfallrisiko im Falle dd zu kompensieren, werden die Gläubiger im Zustand d einen Nominalzinssatz verlangen, der über dem risikolosen Zinssatz liegt. Da im Zustand du die vereinbarten Zinsen und Tilgungszahlungen vollständig geleistet werden, gilt für den Nominalzinssatz im Zustand d

$$\begin{aligned} (1 + k^{\mathrm{nom}}_1)\, D_1 &= \frac{(1+r_f)D_1 - \left(\frac{\widetilde{\mathrm{CF}}^{u}_2(dd)+\tau(D_2-D_1)}{1-\tau} + D_2\right)Q(d|d)}{Q(u|d)} \\ k^{\mathrm{nom}}_1 &= \frac{109.02}{90} - 1 \approx 21.14\,\%. \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber berechnen wir noch die Kapitalkosten der Gläubiger, also die erwarteten Renditen der Fremdkapitalgeber. Aus obiger Herleitung können wir die Zins- und

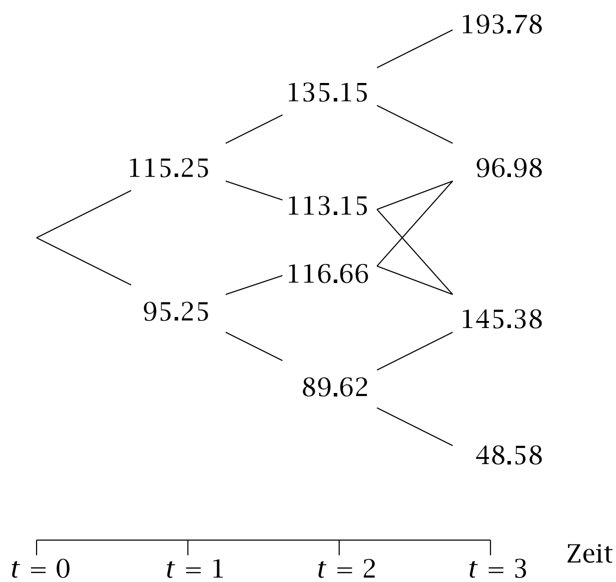


Abbildung 3: Cashflows eines verschuldeten Unternehmens mit Insolvenz.

Tilgungszahlungen an die Fremdkapitalgeber in $t = 1$ ermitteln. Je nachdem, welcher Zustand eintritt, ergibt sich

$$
\begin{aligned}
k_1^{\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{E}\left[\widetilde{\mathrm{I}}_2 + \widetilde{\mathrm{D}}_1^{\diamond} | \mathcal{F}_1\right]}{\mathrm{D}_1} - 1 &= \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{99+99}{90} - 1 & \text{im Zustand up;} \\ \frac{1}{2}\frac{109.02+89.62}{90} - 1 & \text{im Zustand down} \end{cases} \\
&\approx \begin{cases} 10\,\% & \text{im Zustand up;} \\ 10.35\,\% & \text{im Zustand down.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Den Wert des Unternehmens können wir nun auf zweierlei Weise berechnen. Entweder wenden wir die Bewertungsformel unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß an. Oder aber wir verlassen uns auf die APV–Formel, weil wir es in unserem Beispiel mit autonomer Finanzierungspolitik zu tun haben. Im letzten Fall sind die Steuervorteile – trotz Insolvenzrisiko – mit dem risikolosen Zinssatz zu diskontieren, nicht etwa mit dem Nominalzinssatz oder dem Kapitalkostensatz für das Fremdkapital. Jedenfalls führen beide Rechenwege zum selben Resultat. Zur Veranschaulichung wollen wir hier den Weg über die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gehen,

$$
\begin{aligned}
V_0^l &= \frac{\mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_1^l\right]}{1+r_f} + \frac{\mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_2^l\right]}{(1+r_f)^2} + \frac{\mathrm{E}_Q\left[\widetilde{\mathrm{CF}}_3^l\right]}{(1+r_f)^3} \\
&= \frac{0.28 \cdot 115.25 + 0.72 \cdot 95.25}{1+0.1} + \frac{0.07 \cdot 135.15 + 0.21 \cdot 113.15 + 0.22 \cdot 116.66 + 0.5 \cdot 89.62}{(1+0.1)^2} \\
&\quad + \frac{0.03 \cdot 193.78 + 0.3 \cdot 96.98 + 0.4 \cdot 145.38 + 0.27 \cdot 48.58}{(1+0.1)^3} \\
&\approx 257.20\,.
\end{aligned}
$$

Der Marktwert des verschuldeten Unternehmens entspricht exakt dem in Abschnitt 3.1 mit

Hilfe der APV–Gleichung ermittelten Wert. Und dies ist alles andere als offensichtlich.

4 Zusammenfassung

Wir haben zeigen können, dass die DCF–Theorie auch im Fall der Insolvenz unverändert anwendbar bleibt. Um zu diesem Resultat zu gelangen, waren wir gezwungen, einige Annahmen zu treffen. So unterstellten wir, dass die Brutto–Cashflows vor Steuern und Zinsen unabhängig von der Verschuldungspolitik und einer hiermit einhergehenden möglichen Insolvenz sind. Ferner setzten wir voraus, dass im Falle einer Insolvenz Sanierungsgewinne voll zu versteuern sind. Diese Annahmen mögen dem Leser auf den ersten Eindruck restriktiv erscheinen, doch sind sie unserer Ansicht nach ein brauchbarer Ausgangspunkt für weitere Überlegungen. Unter den von uns getroffenen Voraussetzungen lässt sich für ein ausfallbedrohtes Unternehmen eine Bewertungsgleichung herleiten, die sich in keiner Weise von der eines Unternehmens mit nicht ausfallgefährdetem Fremdkapital unterscheidet. Der Wert eines verschuldeten Unternehmens ist somit unabhängig von der Gefahr einer möglichen Insolvenz. Unser Ergebnis gilt für jede beliebige Finanzierungspolitik. Jedoch muss man einschränken, dass nur solche Formen von Finanzierungspolitik gemeint sind, die angesichts drohender Insolvenzen mit den Fremdkapitalgebern vereinbart werden können.

Literatur

Altman, E. I. (1984), ‘A further empirical investigation of the bankruptcy cost question’, *The Journal of Finance* **39**, 1067–1089.

Anderson, R. & Sundaresan, S. (1996), ‘Design and valuation of debt contracts’, *The Review of Financial Studies* **9**, 37–68.

Back, K. & Pliska, S. R. (1991), ‘On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space’, *Journal of Mathematical Economics* **20**, 1–18.

Beja, A. (1971), ‘The structure of the cost of capital under uncertainty’, *Review of Economic Studies* **38**, 359–368.

Black, F. & Cox, J. C. (1976), ‘Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions’, *The Journal of Finance* **31**, 351–367.

Brennan, M. J. & Schwartz, E. S. (1978), ‘Finite difference methods and jump processes arising in the pricing of contingent claims: a synthesis’, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **13**, 461–474.

Canefield, D. (1999), ‘Some remarks on the valuation of firms’, *The Journal of Valuation* **4**, 23–25.

Damodaran, A. (2002), Dealing with Distress in Valuation, http://www.stern.nyu.edu/~adamodar/, Stern School of Business, New York.

Drukarczyk, J. (2002), Die Insolvenzordnung als Versuch der Anreizentfaltung und –dämpfung, *in* W. Auer-Rizzi, E. Szabo & C. Innreiter-Moser, eds, 'Management in einer Welt der Globalisierung und Diversität: Festschrift für Gerhard Reber zum 65. Geburtstag', Schäffer–Poeschel, Stuttgart, pp. 443–482.

Fan, H. & Sunderasan, S. (2000), 'Debt valuation, strategic debt service and optimal dividend policy', *The Review of Financial Studies* **13**, 1057–1099.

Goldstein, R., Ju, N. & Leland, H. E. (2001), 'An ebit-based model of dynamic capital structure', *Journal of Business* **74**, 483–512.

Harrison, J. M. & Kreps, D. M. (1979), 'Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets', *Journal of Economic Theory* **20**, 381–408.

Haugen, R. A. & Senbet, L. W. (1978), 'The insignificance of bankruptcy costs to the theory of optimal capital structure', *The Journal of Finance* **33**, 383–393.

Haugen, R. A. & Senbet, L. W. (1988), 'Bankruptcy and agency costs: their significance to the theory of optimal capital structure', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **23**, 27–38.

Hax, H. (2004), Insolvenzen und Staatseingriffe, *in* M. Heintzen & L. Kruschwitz, eds, 'Unternehmen in der Krise: Ringvorlesung der Fachbereiche Rechts- und Wirtschaftswissenschaft der Freien Universität Berlin im Sommersemester 2003', Duncker & Humblot, Berlin, pp. 209–225.

Janssen, B. (2003), 'Erlass von Steuern auf Sanierungsgewinne', *Deutsches Steuerrecht* **6**, 1055–1059.

Kruschwitz, L. & Löffler, A. (2003), DCF (Part I). available on www.ssrn.com, paper–ID 389408.

Leland, H. E. (1994), 'Coporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure', *The Journal of Finance* **49**, 1213–1252.

Longstaff, F. A. & Schwartz, E. S. (1995), 'A simple approach to value risky fixed and floating rate debt', *The Journal of Finance* **50**, 789–819.

Merton, R. C. (1974), 'On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates', *The Journal of Finance* **29**, 449–470.

Miles, J. A. & Ezzell, J. R. (1980), 'The weighted average cost of capital, perfect capital markets, and project life: a clarification', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* **15**, 719–730.

Modigliani, F. & Miller, M. H. (1958), 'The cost of capital, corporation finance, and the theory of investment', *American Economic Review* **48**, 261–297.

Pink, A. (1995), *Insolvenzrechnungslegung*, IdW–Verlag, Düsseldorf.

Rapp, M.-S. (2003), Die arbitragefreie Adjustierung von Diskontierungssätzen bei einfacher Gewinnsteuer, Diskussionspapier, Version vom 11.12.2003, Handelshochschule Leipzig.

Richter, F. (1997), 'DCF–Methoden und Unternehmensbewertung: Analyse der systematischen Abweichungen der Bewertungsergebnisse', *Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft* **9**, 226–237.

Richter, F. & Drukarczyk, J. (2001), 'Wachstum, Kapitalkosten und Finanzierungseffekte', *Die Betriebswirtschaft* **61**, 627–639.

Ross, S. A., Westerfield, R. W. & Jaffe, J. F. (2002), *Corporate Finance*, 6. edn, Irwin, Chicago.

Rubinstein, M. (2003), 'Great moments in financial economics: Ii. modigliani–miller–theorem', *Journal of Investment Management* **1**.

Schöbel, R. (1999), 'A note on the valuation of risky corporate bonds', *OR Spektrum* **21**, 35–47.

Senbet, L. W. & Seward, J. K. (1995), Financial distress, bankruptcy and reorganization, *in* R. A. Jarrow, V. Maksimovic & W. T. Ziemba, eds, 'Finance', Handbooks in Operations Research and Management Science, Elsevier, Amsterdam, pp. 921–961.

Stiglitz, J. E. (1969), 'A re-examination of the modigliani–miller theorem', *American Economic Review* **59**, 784–793.

Stiglitz, J. E. (1974), 'On the irrelevance of corporate financial policy', *American Economic Review* **64**, 851–866.

Tham, J. & Wonder, N. X. (2001), The non–conventional wacc with risky debt and risky tax shield. available on www.ssrn.com, paper–ID 292959.

Uhrig-Homburg, M. (2001), *Fremdkapitalkosten, Bonitätsrisiken und optimale Kapitalstruktur*, Deutscher Universitäts–Verlag, Wiesbaden.

Uhrig-Homburg, M. (2002), 'Valuation of defaultable claims: a survey', *Schmalenbach Business Review* **54**, 24–57.

Wallmeier, M. (1999), 'Kapitalkosten und Finanzierungsprämissen', *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* **69**, 1473–1490.

Wimmer, K. (2002), *Frankfurter Kommentar zur Insolvenzordnung*, 3. Auflage, Luchterhand, Neuwied, Berlin.

HHL - Leipzig Graduate Shool of Management
Department of Finance

Consumption Based Asset Pricing and Taxation of the Economic Rent

Marc Steffen Rapp*

Bernhard Schwetzler†

1st version: 29th October 2003
This version: 1st June 2004

Keywords: taxation, valuation, risk neutral probability measure

JEL Classifications: D50, G12, G31

*Dipl.-Math. Marc Steffen Rapp is research-assistant at the Department of Finance at the Leipzig Graduate School of Management (HHL); eMail: rapp@finance.hhl.de.

†Prof. Dr. Bernhard Schwetzler is Head of the Department of Finance at the Leipzig Graduate School of Management (HHL), Jahnallee 59, D-04109 Leipzig; eMail: schwetzler@finance.hhl.de

An earlier version of the paper has been presented on the *Second Leipzig Workshop on Mathematics and Economics* (7th of February 2004).

Consumption Based Asset Pricing and Taxation of the Economic Rent

Abstract. *We analyze the impact of the prevailing tax rate upon the risk neutral probability measure that transforms assets into a "fair game". Therefore we assume a linear tax system using the economic rent as tax base and apply the consumption-based asset pricing framework on a two-date economy with representative agents and perfectly inelastic supply of risky assets. Analyzing taxation we account for all effects of public policy with respect to the agent's portfolio choice problem, that is we also consider the redistribution of funds by the tax authority.*

The results are threefold: first, in general the risk neutral probability measure depends on the prevailing tax rate. Second, there is a bundle of – rather strict – assumptions that ensures the risk neutral probability measure to be independent of the prevailing tax rate. This implies an extended version of the neutrality result of Samuelson (1964)*. Finally, it is by no means obvious that the (after-tax) cost of capital of an asset is linear or decreasing in the tax rate.*

Keywords: taxation, valuation, risk neutral probability measure

JEL Classifications: D50, G12, G31

Contents

1 Introduction

Real world consumption opportunities of economic agents are exposed to taxation effects on corporate and on personal level. The effects of the latter are a widely discussed topic in the economic literature, in particular in public economics.[1] There, research has been focused on the impact of taxation upon the risk allocation process, discussing individuals demand for risky assets under personal taxes.[2] In contrast asset pricing literature to a large extend ignores taxation.[3] This note aims to bridge this gap by discussing the effects of personal taxes in the case of a simple linear tax system. According to Atkinson & Stiglitz (1980) who claim about taxation that

> "since it must, of necessity, take income away from individuals, it makes them worse off. As a result of being worse off, they behave differently. That is, individuals typically make different decisions when their incomes change"[4]

this may be a worthwhile concern to do.

We analyze the pricing mechanism of a capital market in equilibrium. Assuming market prices to reflect demand and supply and agents never to be satisfied, capital market can not offer arbitrage opportunities in equilibrium. As a result it is well known that the pricing functional is linear and there exists a probability measure that transforms assets into a "fair game". This probability measure is often referred to as the "risk-neutral probability measure" since under this probability measure agents (a priori assumed to be risk averse) seem to behave as if they were risk-neutral. This risk-neutral probability measure simplifies pricing procedures significantly since the non-linearity of risk aversion may be ignored. One could even claim that it is the risk-neutral probability measure that makes some valuation problems tractable. Consumption based asset pricing frameworks as can be found in LeRoy & Werner (2001), Duffie (1996) or Cochrane (2001) imply that a capital market's risk-neutral probability measure depends on the preferences of the agents acting on the market as well as the assets traded therein. In this paper we analyze the impact of taxes upon the risk neutral probability. This topic is not only of academic interest. If the economy's risk-neutral probability measure is independent of the prevailing tax rate taxation effects (for example on the NPV or the cost of capital of an investment project) could be analyzed in a risk-neutral framework. The tax system that we discuss applies the economic rent (defined as the sum of dividends and capital gains) of a portfolio, as a tax base. The tax rate is assumed to be linear, offering a immediate loss-offset in the case of a negative tax base. In the valuation literature it is often stated that linear

[1] Myles (1995) writes "In the broadest interpretation, public economics is the study of economic policy, with particular emphasis upon taxation.". See Myles (1995), p. 3.

[2] See for example Domar & Musgrave (1944), Stiglitz (1969), Sandmo (1969), Sandmo (1985) and Buchholz & Konrad (2000).

[3] Exceptions are found in Jin & Milne (2003). Jensen (2003*a*) and Jensen (2003*b*) discuss possible reasons for the ignorance.

[4] Atkinson & Stiglitz (1980), p. 27.

taxation of the economic rent is *neutral* in the sense that asset prices are independent of the tax rate.[5] Authors often refer to the seminal work of SAMUELSON (1964) who derived this result in an economy without uncertainty assuming a perfectly elastic supply of the riskless asset.[6] In particular the assumption of a perfectly elastic supply of assets is very uncommon in asset pricing models, since it already presumes the assets' equilibrium prices.[7] Although there have been some attempts to generalize the result of SAMUELSON (1964) to our knowledge, so far it has not been generalized to a model including uncertainty, risk-averse agents and perfectly inelastic supply of assets.[8]

The objective of this note is threefold:

(i) We show that in the *Arrow-Debreu* model the risk neutral probability measure does not only depend on the agents preferences and the assets traded, but also on the prevailing tax rate. Thus the neutrality result of SAMUELSON (1964) in general can not be transferred to an economy with uncertainty, risk averse agents, and perfectly inelastic supply of risky assets.

(ii) We present a bundle of assumptions that ensures that the risk neutral probability measure is independent of the prevailing tax rate even when the supply of risky assets is perfectly inelastic. Furthermore we show that under these assumptions the neutrality result of SAMUELSON (1964) holds.

(iii) As an application we show that in our model it is by no means obvious that the (after-tax) cost of capital of an asset is linear or even just decreasing in the tax rate.

With regards to valuation in particular the last point is worth noting. In practice it is common to account for personal taxes by shortening the risk-adjusted discount rate by the tax factor.[9] Applying this approach yields the invariance of asset prices with respect to the tax rate.[10] Note, that there is a problem with this argument. Presuming that an asset's risk-adjusted discount rate is known implicitly assumes that the price of the asset is known. Therefore accounting for personal taxes by shortening the risk-adjusted discount rate by the tax factor already implies the behavior of the asset's price

[5] See LÖFFLER & SCHNEIDER (2000), RICHTER (2004), p. 30, or SCHWETZLER & PIEHLER (2004), appendix 3. Neutral tax systems have a very important feature - prices of assets behave as in a world without taxes. Therefore it is concluded that researches as well as practitioners may ignore taxes for asset pricing purposes if the tax base is equal to the economic rent.

[6] Even before SAMUELSON PREINREICH (1951) and JOHANSSON (1961) (see JOHANNSON (1969) for the English version) derived similar results.

[7] Asset pricing models following the *Arrow-Debreu-Approach* in general assume the supply of assets to be perfectly inelastic. See DUFFIE (1996), p. 3 or LEROY & WERNER (2001), chapter 1.1.

[8] For attempts with risk-neutral agents see RICHTER (1986) and NIEMANN (1999).

[9] See for example COPELAND, KOLLER & MURRIN (2000), p. 153, BREALEY & MYERS (2003), page 495, or ROSS, WESTERFIELD & JAFFE (1999), page 414.

[10] See section 3.2.2 for the two-date model and COPELAND ET AL. (2000), p. 153 for the annuity model.

with respect to taxation. More precisely it implies that the asset's price is independent from the tax rate. But this is just the question to be analyzed.[11]

We show that assuming perfectly inelastic supply of risky assets the approach to shorten the risk-adjusted discount rate by the tax factor can be justified only by presuming restrictive assumptions about the redistributed regime of the tax authority. Furthermore our analysis shows that these assumptions imply that assets prices are invariant with respect to the prevailing tax rate and asset prices can be derived without considering taxation

We employ the consumption-based asset pricing methodology and use a two-date binominal model to analyze the investment problem of risk averse agents faced with the possibility to invest in three different assets. The payoffs of these assets meet certain conditions: one asset offers a riskless payoff, the remaining two assets offer state-dependent payoffs that are negatively correlated. The states of the world to occur model a *boom* and a *recession* period, respectively.

Assuming the economy to consist of N risk averse agents we follow the standard analysis of consumption based asset pricing models. The framework used is similar to the one used in general equilibrium theory: agents are assumed to maximize their expected utilities. Starting with an initial endowment they are able to trade claims in order to change their wealth position. The market is assumed to be competitive and free of transaction cost and information asymmetries. Prices are assumed to be ascertained by a "Walrasian auctioneer" and agents therefore are assumed to act as price takers.[12] However, in general these prices reflect preferences and endowment structures of the agents living in the economy. Note, that our results with respect to the impact of taxation do not depend on these preferences.

Analyzing equilibrium conditions, we have to account for all effects of taxation policy upon the portfolio choice problem of the investors. Therefore it is important to note that authorities do not only reduce the agents' consumption opportunities by taxation, but also redistribute consumption opportunities.[13] Considering agent's behavior in the presence of taxation we have to account for the redistributed consumption opportunities that enter the agents' portfolio choice problem. According to the behavior of the authorities we distinguish different *redistribution regimes.* Following Buchholz & Konrad (2000) we model redistribution regimes by a random variable L denoting the redistributed consumption opportunities that by assumption entirely enter the agent's portfolio choice problem.

In our analysis we follow Jones & Milne (1992) and assume that authorities are endowed with initial funds. By redistribution they may either spend these funds in

[11] One assumption that could justify the discussed approach is the assumption of a perfectly elastic supply of assets. As already mentioned this is a very uncommon assumption for asset pricing purposes, since it already implies the result of the pricing considerations.

[12] Consumption-based asset pricing frameworks are applications of the concept of rational expectations equilibrium. In a rational expectations equilibrium agents behave competitively and therefore act as price takers. See Brunnermeier (2001), chapter 1.2.

[13] See Stiglitz (2000), part I.

total or just in parts and *consume* the rest themselves.[14] In particular we discuss the following two different *redistribution regimes*:[15]

(i) the *no-redistribution regime,* where authorities fully consume their taxation revenues themselves and do not redistribute anything,[16]

(ii) the *in-out-redistribution regime,* where authorities redistribute exactly their revenues received by taxation.

It is almost obvious that the overall effect of a tax-and-redistribution system is highly sensitive with respect to the redistribution regime of the authority. From a public economics perspective the effects of the two redistribution regimes in the context of an income tax system is discussed in STIGLITZ (1969) and BUCHHOLZ & KONRAD (2000). STIGLITZ (1969) concludes within a set-up similar to our no-redistribution regime that *"increased income taxes with full loss-offset lead to increased demand for risky assets if*

(i) the return to the safe asset is zero, or

(ii) absolute risk aversion is constant or increasing, or

(iii) absolute risk aversion is decreasing and relative risk aversion increasing or constant."[17]

On the other hand, by comparing the fraction of wealth invested in the market portfolio and the fraction of wealth invested in riskless assets BUCHHOLZ & KONRAD (2000) show that *in an equilibrium model with an in-out-redistribution regime an income tax is completely neutral concerning the risk-allocation process.*[18]

Table 1 compares the model used in this paper with the models of STIGLITZ (1969) and BUCHHOLZ & KONRAD (2000).

The rest of the paper is organized as follows: section 2 presents the general framework. The tax system is introduced in subsection 3.1 and analyzed in section 3.2. The main results are derived in 3.2.1 and 3.2.2. To clarify our findings section 4 presents a numerical example. There we also address an application of our model: The question whether the cost of capital of an asset is sensitive with respect to the tax rate. A conclusion then summarizes the results.

[14]By assumption neither taxation nor redistribution does not to change the pre-tax payoffs of any assets traded in the economy. Thus we do not account for infrastructure or other investments undertaken by tax authorities that might change a company's production function.

[15]See ATKINSON & STIGLITZ (1980), chapter 4-3. There the two cases are called "polar cases", ATKINSON & STIGLITZ (1980), p. 118.

[16]The valuation literature dealing with tax effects largely ignores redistribution and its effects. This is similar to our model of a no-redistribution regime.

[17]See STIGLITZ (1969), proposition 2, p. 274.

[18]See BUCHHOLZ & KONRAD (2000), proposition 3, p. 89.

	Stiglitz (1969)	Buchholz & Konrad (2000)	*our model*
research area	public finance		asset pricing
goal	analyze demand for risky assets		analyze pricing mechanism for risky assets
supply of assets	perfectly elastic		risky assets: perf. inelastic riskless asset: perf. elastic
assets	(i) riskless asset (ii) risky asset		(i) riskless asset (ii) cyclical asset (iii) anti-cyclical asset
redistribution regime	similar to no-redistribution	in-out-redistribution	both regimes
approach	individual optimization	equilibrium model	equilibrium model
result	preferences that imply an increasing demand for risky assets	neutrality concerning the risk-allocation process	

Table 1: Comparing our model

2 Analytical Framework

2.1 The model

In this section we recall the idea of consumption based asset pricing. We use a two-date model with finite state space as described in Huang & Litzenberger (1988), Duffie (1996) or of LeRoy & Werner (2001) and apply the well known first-order condition for optimal portfolio choice of a single agent. There are N rational agents participating in the market. Aggregation over agents and the market clearance assumption lead to an equilibrium condition. Equilibrium prices are set by a "Walrasian auctioneer".[19] We derive equilibrium state prices, sometimes referred to as prices of *Arrow-Debreu securities*. Following the idea of linear pricing in arbitrage free markets as presented in Ross (1976) we characterize market prices for cash flows in terms of these state prices: The price of a cash flow is the sum (over all states) of each state price times the state dependent cash flow.

We follow Lucas (1978) and use a representative agents model of a pure exchange economy.[20] We assume the economy to consist of N equivalent agents with identical utility function and initial endowment. Since we aim to focuses on the agents optimal portfolio choice, present consumption does not enter the agent's utility functions in our model.

[19]Note that the resulting equilibrium is Pareto-optimal. See Huang & Litzenberger (1988), chapter 5.

[20]A critique of this method is found in Kirman (1992).

Our two-date model has trading dates $t = 0$ and $t = 1$.[21] The present, represented by date 0, is certain, whereas in $t = 1$ one of two possible states of the world realizes. This is modeled by the state space $\Omega = \{b, r\}$, where b denotes the *boom* and r the *recession* state. There is a competitive capital market with no transaction costs or information asymmetries. Three assets $i = 0, 1, 2$ are traded in the market, characterized by state-dependent payoffs $x_i = (x_{ib}, x_{ir})$. The payoff structure of the three assets is denoted by $X = (x_0^T, x_1^T, x_2^T)$.

The assets are assumed to be perfectly divisible and trade in $t = 0$ at a price p_i. The price vector (p_0, p_1, p_2) is denoted by p. Portfolios are characterized by $h = (h_0, h_1, h_2)$, where h_i denotes the fraction of the asset i held in the portfolio. An agent acting on the capital market is characterized by her initial endowment (e_0, e_1) and her utility function U. Since date 0 consumption does not enter agent's utility function today's initial endowment by assumption is zero. Date 1 endowment e_1 consists of fractions of the three tradable assets represented by a portfolio $\bar{h} = (\bar{h}_0, \bar{h}_1, \bar{h}_2)$.[22] holds. All agents are assumed to be risk averse with decreasing but always strictly positive marginal utility.[23]

By defining the market portfolio $h_m = N \cdot \bar{h}$, i.e. as the initial portfolio of a representative agent times the number of agents, total consumption opportunities in the economy are determined by

$$C_s = \sum_{i=0}^{2} h_{mi} \cdot x_{is}, \qquad \text{for } s \in \Omega. \tag{1}$$

In order to justify the terms *boom* and *recession* state

$$C_r < C_b \tag{2}$$

is assumed to hold.

By assumption the agents utility function U satisfies the expected-utility-hypothesis[24] with a state-independent von Neumann-Morgenstern utility function u and a probability measure $\phi = (\phi_b; \phi_r)$. For every date 1 consumption plan $c = (c_b, c_r)$ the associated utility $U(c)$ then can be written as

$$U(c) = \mathbb{E}^{\phi}[u(c)] = \sum_{s \in \{b,r\}} \phi(s) \cdot u(c_s). \tag{3}$$

To ensure the expected-utility function U to satisfy the assumptions of strict monotonicity and strict quasi-concavity, i.e. U models a risk averse agent, we impose some

---

[21] A similar model - accounting for corporate and personal taxes on gross returns - is described in Ross (1985).

[22] For this portfolio $e_1 = \sum_{i=0}^{2} \bar{h}_i \cdot x_i$.

[23] These properties of the utility function U may be formalized by the assumptions of *strict monotonicity* and *strict quasi-concavity.* See Hens & Pilgrim (2001), p. 6.

[24] The expected-utility-hypothesis may be grounded on an axiomatic theory of choice. For a suitable axiomazation for the model presented here see for example Wakker (1989).

further restrictions. These include the probability measure not to attach zero probability to any state. Finally u has to be twice differentiable with u' strictly positive and u'' strictly negative.[25]

Equilibrium prices reflect demand and supply of the assets. To make the problem tractable we assume the supply of the riskless asset to be perfectly elastic whereas the supply of the risky assets is assumed to be perfectly inelastic (see figure 1). This assumption could be justified by the observation that the supply of riskless assets is coordinated by a authority like the European Central Bank or the Federal Reserve Bank in the US and therefore is likely to be elastic.

On the other hand the set of tradable risky assets at least temporarily may be assumed to be bounded and therefore the supply of risky assets is likely to be inelastic.[26]

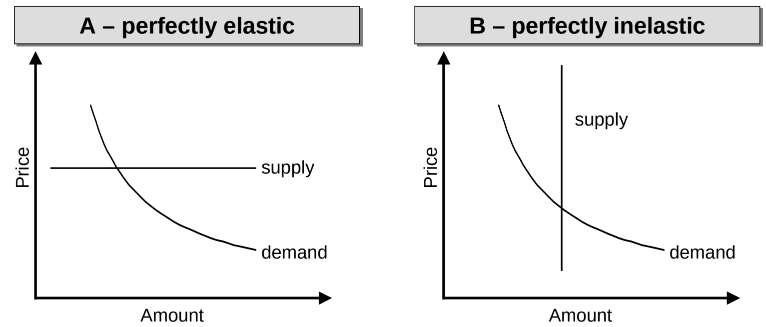


Figure 1: Perfectly elastic vs. perfectly inelastic supply

2.2 The individual portfolio choice problem

For a given price vector p each agent's portfolio choice problem can be stated as

$$\max_h \{U(c(h))\} \tag{4}$$

subject to the budget constraints[27]

$$0 \geq \sum_{i=0}^{2} h_i \cdot p_i \tag{5}$$

$$c(h) \leq \sum_{i=0}^{2} h_i \cdot x_i + e_1. \tag{6}$$

[25] See Hens & Pilgrim (2001), p. 10.

[26] Note, that the classical derivation of the CAPM is based on the same set of assumptions. See Lintner (1965), Sharpe (1964) and Sharpe (1991) for a survey of alternatives.

[27] Condition (5) reflects the fact that capital markets allow agents to transfer a maximum of the initial date 0 endowment to date 1 by a portfolio h. Note that we assumed e_0 to be zero.

Condition (6) allows for date 1 consumption up to the sum of the initial date 1 endowment and the payoff of portfolio h. Note that e_1 can be thought of as the initial portfolio $\bar{h}$. So condition (6) can be restated by

$$c(h) \leq \sum_{i=0}^{2} (h_i + \bar{h}_i) \cdot x_i. \tag{7}$$

Using Lagrange-multipliers the first-order condition of problem (4)-(6) then can be restated by

$$\begin{aligned}
\phi(s) \cdot u'(c_s) - \mu_s &\leq 0, && \text{for all } s \in \Omega && (8)\\
\{\phi(s) \cdot u'(c_s) - \mu_s\} \cdot c_s &= 0, && \text{for all } s \in \Omega && (9)\\
\lambda \cdot p_i &= \sum_{s \in \Omega} \mu_s \cdot x_{is} && \text{for } i = 0, 1, 2 && (10)
\end{aligned}$$

with non-negative Lagrange-multipliers λ, μ_b and μ_r.[28] We solve eqs. (8)-(10) in order to express asset prices by agents' marginal utility in optimal consumption.[29]

In a first step the payoff of the riskless asset is substituted into eq. (10). We derive

$$p_0 = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\sum_{s \in \Omega} \mu_s \right) \cdot x_{0s},$$

being independent of s. By defining

$$r_0 := \frac{1}{\sum\limits_{s \in \Omega} \mu_s} \cdot \lambda - 1 \tag{11}$$

as the return of the riskless asset λ can be written as

$$\lambda = (1 + r_0) \cdot \sum_{s \in \Omega} \mu_s. \tag{12}$$

Assuming strict positive consumption in each state eq. (9) may be restated by

$$\phi(s) \cdot u'(c_s) = \mu_s.$$

This allows to write λ

$$\lambda = (1 + r_0) \cdot \sum_{s \in \Omega} \Big(\phi(s) \cdot u'(c_s) \Big) = (1 + r_0) \cdot \mathbb{E}^{\phi}[u'(c)] \tag{13}$$

with

$$\mathbb{E}^{\phi}[u'(c)] = \sum_{s \in \Omega} \phi(s) \cdot u'(c_s).$$

[28] See LeRoy & Werner (2001), p. 7-8.

[29] Note that the concavity of the utility function and the strict positive initial endowment ensure that the solution is not a corner solution.

Substituting eq. (13) into (10) yields

$$p_i = \frac{1}{1+r_0} \cdot \frac{\mathbb{E}^{\phi}[u'(c) \cdot x_i]}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(c)]}. \tag{14}$$

Eq. (14) states that the given price vector may be characterized by agents' marginal utilities in optimal date 1 consumption c.[30]

We are also interested in state-prices, i.e. in the price for a *virtual* security offering a state dependent payoff

$$x_{s_o}(s) = \begin{cases} 1 & : s = s_o \\ 0 & : s \neq s_o \end{cases}. \tag{15}$$

The vector of state prices $(\pi_b; \pi_r)$ is denoted by π.

For arbitrage free markets it is well known that value additivity holds and the pricing functional

$$\Psi : x \mapsto p(x), \tag{16}$$

that attaches to every payoff x its price $p(x)$ is linear. Applying some linear algebra[31] shows that there exists a vector $\tilde{\pi}$ such that if $x \bullet \tilde{\pi}^T$ denotes the scalar product of x and $\tilde{\pi}$

$$p(x) = x \bullet \tilde{\pi}^T \tag{17}$$

holds for every payoff x.[32] If markets are complete the pricing functional is unique and is characterized by $\tilde{\pi}$. For an arbitrary payoff $x = (x_b; x_r)$ the price of this payoff is then given by

$$p = x \bullet \tilde{\pi}^T = \sum_{s \in \Omega} x_s \cdot \tilde{\pi}_s. \tag{18}$$

By applying the pricing functional Ψ to the basic securities defined by eq. (15) we obtain

$$\tilde{\pi}_s = \pi_s, \qquad \text{for all } s \in \Omega. \tag{19}$$

That is the state prices characterize the price of each payoff as the payoff-weighted sum over all state prices. If markets are complete and the pricing functional is known, the state price vector π also is known.

---

[30] Note therefore that for any given utility function U satisfying the expected-utility-hypothesis (EUH) the function $U^* : x \mapsto \frac{U(x)}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(c)]}$ is a utility function satisfying the EUH that represents the same preferences.

[31] Alternatively one may apply the *Riesz Representation* theorem in the version given in Duffie (1996), p. 11.

[32] The superscript T denotes throughout the transposed of the vector.

2.3 Equilibrium prices in an economy with representative investors

The two previous subsections analyzed a single agents optimal portfolio choice with respect to a given pair $(p; X)$, i.e. a price vector p and payoff structure X. Now we analyze the situation where all agents optimize their portfolio choice simultaneously. That is, we are interested in equilibrium security price vectors according to the definition of an equilibrium given below.

In representative agents models all agents have identical utility functions and endowments. We therefore define a representative agents economy as a triple $(N; U; e)$, where N denotes the number of agents with utility function U and initial endowment e.[33]

2.1. Definition (Equilibrium): For a representative agents economy $(N; U; e)$ an *equilibrium* is a pair $(h; p)$, consisting of a portfolio h and a security price vector p, such that

(a) h solves the portfolio choice problem (4) of each agent (individual optimality) and

(b) $\sum_{n=1}^{N} h = 0$ (market clearing[34])

given the security price vector p.

Note that the market clearing condition (b) implies $h = 0$. That is representative agents models imply an important feature: the *no-trade property.* In representative agents models equilibrium prices are the prices where no (representative) agent is willing to buy or sell anything and therefore the total trading volume is zero. In other words agents keep (and consume) their initial endowment.[35]

Asset equilibrium prices in representative agents models are given by eq. (14) with $c = e_1$

$$p_i = \frac{1}{1 + r_0} \cdot \frac{I\!E^{\phi}[u'(e_1) \cdot x_i]}{I\!E^{\phi}[u'(e_1)]}. \tag{20}$$

and thus may be characterized by the marginal utility in the initial endowment e_1.[36] Comparing the prices of assets offering the same expected payoff $I\!E^{\phi}[x]$ we observe

[33]Note that date 0 consumption does not enter the utility function.

[34]Hens & Pilgrim (2001) show that in the case of monotone utility functions *market clearing* is a sufficient condition for the equilibrium concept, since monotone utility functions force each agent to exhaust his individual budget restriction. Cf. Hens & Pilgrim (2001), p. 15.

[35]Rf. LeRoy & Werner (2001), p. 11. Note that we assumed the economy to be closed and to be a pure exchange economy without production. Therefore the *no-trade-trading-strategies* lead to market clearance.

[36]Note that all prices are characterized with respect to the riskless return r_0 defined as the return of the riskless asset. Since we excluded the intertemporal consumption optimization problem from our analysis we had to assume a perfectly elastic supply of riskless assets. Without this assumptions our results would only relate to relative prices of the asset instead of price levels.

that the prices of assets with payoffs in recession states are higher than those of assets offering payoffs in boom states. This is a result of the agents decreasing marginal utility.

2.4 Pricing by risk-neutral probabilities

If markets are free of arbitrage and the pricing functional Ψ is linear there exists a vector $\tilde{\pi}$ such that

$$\Psi : x \mapsto x \bullet \tilde{\pi}^T$$

holds for every payoff x. We already proved that $\tilde{\pi}$ is equal to the vector of state prices π. By applying Ψ to the payoff of a risk-free asset we calculate

$$\sum_{s\in\Omega} \pi_s = \frac{1}{1+r_0}, \tag{21}$$

where r_0 denotes the return of the risk-free asset. If markets are complete $\pi_s > 0$ holds for all states s in equilibrium since otherwise agents would be willing to buy portfolios offering infinite state s payoff. Combining these findings we are able to identify the vector q defined via

$$q_s = (1+r_0) \cdot \pi_s \tag{22}$$

as a probability measure Q on the state space Ω. For this probability measure

$$\Psi(x) = x \bullet \pi^T = \frac{1}{1+r_0} \cdot x \bullet q^T = \frac{1}{1+r_0} \cdot \sum_{s\in\Omega} x \cdot q_s = \frac{1}{1+r_0} \cdot \mathbb{E}^Q[x] \tag{23}$$

holds for every payoff x. Q is called risk-neutral probability measure, since we are able to derive asset prices by discounting the $Q-$expected values using the risk-free return.

As already mentioned equilibrium state prices may be characterized by the marginal utility of the representative investor via

$$\pi_s = \frac{1}{1+r_0} \cdot \frac{\phi(s) \cdot u'(e_{1s})}{\mathbb{E}^\phi[u'(e_1)]}. \tag{24}$$

Following definition (22) the risk-neutral probabilities q_s are derived from the subjective probability $\phi(s)$ by a rescaling via the marginal utilities of the state s. This is shown in the following representation of q_s

$$q_s = \frac{u'(e_{1s})}{\mathbb{E}^\phi[u'(e_1)]} \cdot \phi(s). \tag{25}$$

Note that since for risk averse agents $u'(e_{1s}) > 0$ holds the vector ρ defined by

$$\rho_s = \frac{u'(e_{1s})}{\mathbb{E}^\phi[u'(e_1)]} \tag{26}$$

satisfies the conditions of a probability density with respect to ϕ and

$$\Psi(x) = \frac{1}{1+r_0} \mathbb{E}^{\phi}[\rho \cdot x] \tag{27}$$

holds for every payoff x.

We define the vector $\hat{\pi}$ by

$$\hat{\pi}_s = \frac{\pi_s}{\phi(s)}, \qquad \text{for all } s \in \Omega. \tag{28}$$

The vector $\hat{\pi}$ is often called the *state price kernel* since

$$\Psi(x) = \mathbb{E}^{\phi}[\hat{\pi} \cdot x] \tag{29}$$

holds for every payoff x.[37]

3 Including Taxes

3.1 The tax system and different tax redistribution policies

The tax system assumed here is simple. The tax base is the economic rent, i.e. the sum of the dividends and the capital gains of a portfolio. The tax function is assumed to be linear with a tax rate $\lambda > 0$ which is assumed to identical for all agents. If the tax base is negative there is a immediate tax substitution. Other taxes on corporate as well as personal level are not considered.

Recall that we denoted the *market portfolio* by h_m. Total tax payments in state s in this tax system then sums up to[38]

$$T_{\lambda s} = -\lambda \cdot B_{\lambda s} = -\lambda \cdot \sum_{i=0}^{2} h_{mi} \cdot (x_{is} - p_{\lambda i}) \tag{30}$$

where $B_{\lambda s} = \sum_{i=0}^{2} h_{mi} \cdot (x_{is} - p_{\lambda i})$ denotes the aggregated tax base in state s based on the *after tax*-prices $p_{\lambda i}$ of the assets.[39]

As already mentioned authorities in general do not only collect taxes but also apply redistribution regimes to redistribute money. We model a redistribution regime by a random variable $L_\lambda = (L_{\lambda b}, L_{\lambda r})$, where $L_{\lambda s}$ denotes the aggregated redistributed amount at time $t = 1$ in state s. By assumption redistribution entirely enters agents portfolio choice problem not altering agents' beliefs, preferences or initial endowment. Since we assume all agents to be alike the redistribution is uniform and the amount redistributed to a single agent is $l_{\lambda s} = N^{-1} \cdot L_{\lambda s}$.

We discuss two redistribution regimes:

[37] State price deflator, state price density, or stochastic discount factor are other commonly used terms for $\hat{\pi}$.

[38] Note that here and throughout capital letters denote aggregated values.

[39] Note the sign of $T_{\lambda s}$. If agents are forced to pay taxes (receive tax subsidies) $T_{\lambda s}$ is negative (positive) in order to indicate a loss (a gain) in consumption opportunities.

(i) the no-redistribution regime, defined by $L_{\lambda b} = L_{\lambda r} = 0$ and

(ii) the in-out redistribution regime with $L_{\lambda s} = -\lambda \cdot B$

where agents are well aware what type of redistribution the authority is going to apply. There is no uncertainty about this redistribution policy. [40]

Total consumption opportunities after taxes and redistribution in the economy, i.e. the net endowment, are then determined by

$$E_{\lambda s} = \sum_{i=0}^{2} h_{mi} \cdot \Big(x_{is} - \lambda \cdot (x_{is} - p_{\lambda i})\Big) + L_{\lambda s}, \qquad \text{for } s \in \Omega. \tag{31}$$

Therefore the net economic effect of taxes and redistribution may be measured by

$$\Delta_{\lambda s} = E_s - E_{\lambda s} = T_{\lambda s} + L_{\lambda s} = -\lambda \cdot \sum_{i=0}^{2} h_{mi} \cdot (x_{is} - p_{\lambda i}) + L_{\lambda s} \tag{32}$$

and the decrease or increase of utility caused by $\Delta_{\lambda s}$.

In the next subsection we discuss the analytical treatment of the tax-and-redistribution model. We differentiate between a tax effect and a redistribution effect. The tax effect is caused by taxation of the assets payoff and the resulting change in consumption opportunities offered by an asset to its owner. The redistribution effect is caused by the lump-sum transfers of the authority and the resulting change in the agents' initial endowment.

3.2 Treating taxes and redistribution transfers analytically

Lump-sum redistribution transfers change agents initial endowment. There are two ways one might think of integrating the redistribution effects. The first way is to introduce an additional (tradable) *redistribution-asset* with payoff L_λ in the market, reflecting the impact of redistribution on consumption opportunities. The second way is to utilize state dependent "*after redistribution*" utility functions that might be aggregated by the standard probability measure ϕ. Due to the circularity discussed below we choose the first and aggregate both effects to a "*net-tax-effect*".

The investment universe of our model is now spanned by four assets, the three tradable assets described in the no-tax case of subsection 2.1 and the redistribution-asset with payoff L_λ denoted as x_3. The after-tax payoff of the endowment-assets are given by

$$x_{\lambda is} = x_{is} - \lambda \cdot (x_{is} - p_{\lambda i}), \qquad \text{for } i = 0, 1, 2. \tag{33}$$

Agents are maximizing the expected utility by adjusting their after-tax consumption opportunities according to their initial endowment represented by a portfolio $\bar{h} =$

[40] Our model can be extended easily to capture further different redistribution regimes. For example one could think of a *stimulating* redistribution regime characterized by $L_r > L_b$.

$(\bar{h}_0; \ldots; \bar{h}_3)$ with $\bar{h}_3 = N^{-1}$. We call the portfolio containing all assets the extended market portfolio and denote it by $\bar{h}_m$. For $\lambda = 0$ and $L = 0$ the model presented here coincides with the model of section 2.1 since then the payoff of the endowment-assets coincide and the redistribution-asset offers a zero-payoff.

The individual state dependent after-tax consumption opportunities arising from the initial portfolio $\bar{h}$ are given by

$$e_{\lambda 1s} = \sum_{i=1}^{2} \bar{h}_i \cdot x_{\lambda is} + l_{\lambda s} = \sum_{i=1}^{2} \bar{h}_i \cdot (x_{is} - \lambda \cdot (x_{is} - p_{\lambda i})) + l_{\lambda s}. \tag{34}$$

The associated tax payments are

$$t_{\lambda s} = -\lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} \bar{h} \cdot (x_{is} - p_{\lambda i}) \tag{35}$$

and the net tax-effect is

$$\delta_{\lambda s} = t_{\lambda s} + l_{\lambda s}. \tag{36}$$

Therefore

$$e_{\lambda 1} = e_1 + \delta_\lambda \tag{37}$$

links the consumption opportunities with and without taxes $e_{\lambda 1}$ and e_1, respectively. The associated risk neutral density, risk neutral probabilities, state prices, and the stochastic discount factors with respect to the tax rate λ as well as the asset prices, are given by

$$\rho_{\lambda s} = \frac{u'(e_{1s} + \delta_{\lambda s})}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + \delta_\lambda)]} \tag{38}$$

$$q_{\lambda s} = \rho_{\lambda s} \cdot \phi(s) \tag{39}$$

$$\hat{\pi}_{\lambda s} = \frac{1}{1 + r_{\lambda 0}} \cdot \rho_{\lambda s} \tag{40}$$

$$\pi_{\lambda s} = \frac{1}{1 + r_{\lambda 0}} \cdot \rho_{\lambda s} \cdot \phi(s) \tag{41}$$

$$p_{\lambda i} = \frac{1}{1 + r_{\lambda 0}} \cdot \mathbb{E}^{\phi}[\rho_{\lambda s} \cdot x_{\lambda i}]. \tag{42}$$

According to Equ. (38) to (42) taxes may influence asset prices in three different ways:

(1) via the riskless return $r_{\lambda 0}$,

(2) via the marginal utilities $u'(e_{1s} + \delta_{\lambda s})$ that are affected by the net tax-effect $\delta_{\lambda s}$, and

(3) via the consumption opportunities offered to the holder of an asset by the asset's (after tax) payoff $x_{\lambda i}$.

For the first effect it is easily seen that $r_{\lambda 0}$ is affected linearly by the tax rate λ, i.e. $r_{\lambda 0} = (1-\lambda)\cdot r_0$ holds. The second and the third effect are interdependent: Marginal utility depends on consumption opportunities available, which are determined by the net tax effect. Net tax effect depends on after tax asset prices $p_{\lambda i}$ as shown in

$$\delta_{\lambda s} = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} \bar{h}_i \cdot (x_{is} - p_{\lambda i}) - l_{\lambda s}. \tag{43}$$

After-tax asset prices themselves depend on marginal utilities as

$$p_{\lambda i} = \frac{1}{1+r_{\lambda 0}} \cdot \mathbb{E}^{\phi}\left[\frac{u'(e_{1s}+\delta_{\lambda s})}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1+\delta_\lambda)]} \cdot x_{\lambda i}\right]$$

shows. Obviously there is a *circularity problem,* since after-tax asset prices are given by an implicit function. Additionally the net tax-effect (and therefore asset prices, state prices, risk-neutral probabilities and so forth) depends on the redistribution policy characterized by $L_{\lambda s}$.

3.2.1 The no-redistribution regime

The no-redistribution regime serves as a starting point and allows to differentiate between taxation and redistribution effects, since it is characterized by $L_\lambda = 0$. The net-tax-effect for the no-redistribution regime is therefore given by

$$\delta_{\lambda s} = t_{\lambda s} = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{2} \bar{h} \cdot (x_{\lambda s} - p_{\lambda i s}) \tag{44}$$

and accounts for taxation effects only.

We start our analysis with the sensitivity of the risk-neutral density vector ρ with respect to the tax rate λ. Under the no-redistribution regime ρ is given by

$$\rho_{\lambda s} = \frac{u'(e_{1s}+t_{\lambda s})}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1+t_\lambda)]} \tag{45}$$

We identify two effects of taxation on the risk-neutral density vector:

(1) a direct state dependent effect resulting from the net-tax effect δ_s in state s and

(2) an indirect state-independent effect arising from the net-tax effect in the other states due to the standardization via $\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1+\delta_\lambda)]$.

The following assumption allows to treat the two effects analytically and to derive preference-free results.

3.1. Assumption: For all tax rates $\lambda \in [0; 1]$ the aggregated tax base of the recession state B_r is non-positive.

Since the aggregated tax base of the recession state B_r is given by

$$B_r = X_r \bullet h_m^T - p \bullet h_m^T, \tag{46}$$

where $X_r = (x_{0r}, x_{1r}, x_{2r})$ this assumption is equivalent to

$$X_r \bullet h_m^T \leq p \bullet h_m^T. \tag{47}$$

With $\lambda \geq 0$ and $T_r = -\lambda \cdot B_r$ the assumption is also equivalent to

$$T_r \geq 0. \tag{48}$$

We are now able to characterize the two effects on ρ. First note that according to the negative tax base eq. (48) implies that in the *recession* state aggregated tax payments T_r are non-negative, i.e. there are tax subsidies.[41] As a result after-tax consumption opportunities $e_{\lambda r}$ available to agents in the recession state are at least not reduced compared to pre-tax consumption opportunities e_r. Therefore the direct effect in the recession state is non-positive, i.e. $u'(e_{1r} + t_{\lambda r})$ does at least not increase in the tax rate λ, due to the assumption of decreasing marginal utility.

The boom state shows the opposite effect. The tax base here is positive[42] and taxation reduces the after-tax consumption opportunities $e_{\lambda b}$. According to the assumption of decreasing marginal utility $u'(e_{1b}+t_{\lambda b})$ increases in the tax rate λ. With the arguments presented above the direct effect in the boom state is positive, i.e. $u'(e_{1b}+t_{\lambda b})$ increases with the tax rate. Figure 2 demonstrates both effects.

Having determined the direct effect we now include the indirect effect in our analysis by recalling that

$$\begin{aligned} u'(e_{1r} + t_{\lambda_2 r}) &\leq u'(e_{1r} + t_{\lambda_1 r}) && (49) \\ u'(e_{1b} + t_{\lambda_2 b}) &> u(e_{1b} + t_{\lambda_1 b}) && (50) \end{aligned}$$

holds for all tax rates λ_1, λ_2 with $\lambda_1 < \lambda_2$. Defining a_r and a_b by

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{u'(e_{1r} + t_{\lambda_2 r})}{u'(e_{1r} + t_{\lambda_1 r})} \leq 1 && (51) \\ a_b &= \frac{u'(e_{1b} + t_{\lambda_2 b})}{u'(e_{1b} + t_{\lambda_1 b})} > 1 && (52) \end{aligned}$$

we are able to write

$$E^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})] = \sum_{s \in \Omega} \phi(s) \cdot a_s \cdot u'(e_{1s} + t_{\lambda_1 s}) = a_u \cdot \sum_{s \in \Omega} \phi(s) \cdot \frac{a_s}{a_u} \cdot u'(e_{1s} + t_{\lambda_1 s})$$

[41] Our result remain unchanged when no tax subsidies are granted.

[42] Otherwise our assumption of a strictly non-negative riskless return r_0 would imply arbitrage opportunities.

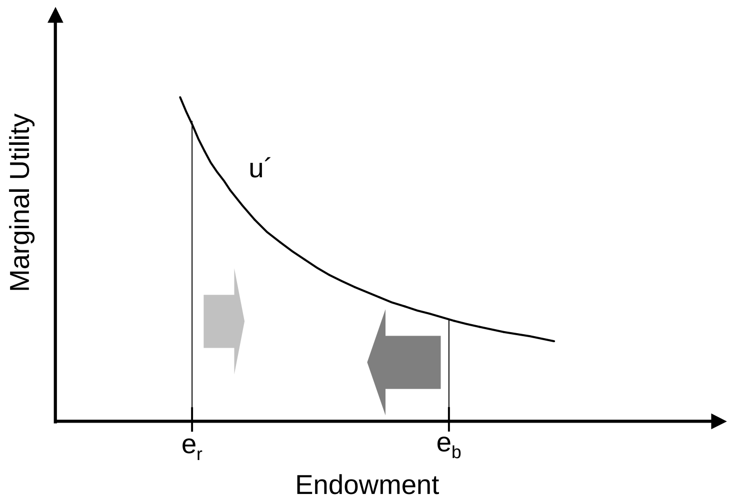


Figure 2: Visualizing the taxation effect for the marginal utilities

for $u \in \{r, b\}$. This implies

$$a_r \cdot \mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})] < \mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})] < a_b \cdot \mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})] \tag{53}$$

since $a_r \leq 1, a_b > 1$ and $\phi(r)$ as well as $\phi(b)$ are greater zero.[43] Now note that

$$\alpha_r \cdot \mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})] < \mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})]$$

is equivalent to

$$\frac{\alpha_r}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})]} < \frac{1}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})]}.$$

Multiplying the last inequality with $u'(e_{1r} + t_{\lambda_1 r})$ yields

$$\frac{u'(e_{1r} + t_{\lambda_2 r})}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})]} \leq \frac{u'(e_{1r} + t_{\lambda_1 r})}{\mathbb{E}^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})]} \tag{54}$$

which is equal to

$$\rho_{\lambda_2 r} \leq \rho_{\lambda_1 r}. \tag{55}$$

Going a similar way yields

$$\frac{u'(e_{1b} + t_{\lambda_2 b})}{E^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_2})]} \geq \frac{u'(e_{1b} + t_{\lambda_1 b})}{E^{\phi}[u'(e_1 + t_{\lambda_1})]} \tag{56}$$

and

$$\rho_{\lambda_2 b} \geq \rho_{\lambda_1 b}. \tag{57}$$

[43] Otherwise our model would be deterministic.

3.2. Proposition: *Within the no-redistribution regime the risk-neutral density for the recession state $\rho_{\lambda r}$ decreases in the tax rate, whereas for the boom state $\rho_{\lambda b}$ increases with the tax rate. Since the subjective probability measure ϕ is qua definitione independent of the tax rate the same holds true for the risk-neutral probabilities $q_\lambda = (q_{\lambda b}; q_{\lambda r})$.*

In the *pre-tax case,* that is $\lambda = 0$, it is well known that

$$\rho_b \leq 1 \leq \rho_r.$$

Assuming a strictly positive riskless pre-tax return (that remains strictly positive after taxation) and the assumption 3.1 ensures that

$$\rho_{\lambda b} \leq 1 \leq \rho_{\lambda r}$$

holds true for every tax rate λ. Furthermore if tax subsidiaries are granted taxation reduces volatility of after-tax consumption opportunities up to deterministic payments. This implies

$$\lim_{\lambda \to 100\%} \rho_{\lambda b} = \lim_{\lambda \to 100\%} \rho_{\lambda r} = 1. \tag{58}$$

To analyze the stochastic discount factor $\hat{\pi}$ and the state price vector π we recall the definition of the riskless return

$$r_{\lambda 0} = \left(\sum_{s \in \Omega} \pi_{\lambda s} \right)^{-1} - 1 = 1/\mathbb{E}^\phi[\hat{\pi}_\lambda] - 1.$$

Therefore we may write $\hat{\pi}_{\lambda s}$ as

$$\hat{\pi}_{\lambda s} = \frac{1}{1 + r_{\lambda 0}} \cdot \rho_{\lambda s} = \mathbb{E}^\phi[\hat{\pi}_\lambda] \cdot \rho_{\lambda s} = \left(\sum_{s \in \Omega} \hat{\pi}_{\lambda s} \cdot \phi(s) \right) \cdot \rho_{\lambda s}.$$

Some algebraic rearrangements yield

$$\rho_{\lambda r} \cdot \hat{\pi}_{\lambda b} = \rho_{\lambda b} \cdot \hat{\pi}_{\lambda r}. \tag{59}$$

By applying the results of proposition 3.2 to eq. (59) we obtain the following proposition.

3.3. Proposition: *Within the no-redistribution regime the stochastic discount factor for the recession state $\hat{\pi}_{\lambda r}$ decreases in the tax rate, whereas for the boom state $\hat{\pi}_{\lambda b}$ increases with the tax rate. The same holds true for the state prices $\pi_\lambda = (\pi_{\lambda b}; \pi_{\lambda r})$.*

As a result we obtain a taxation effect on asset prices that depends on the correlation of the asset's payoff with the aggregate pre-tax endowment. Note however, that there are two different effects that conjoin to the taxation effect: On the one hand there is the *direct taxation effect* that affects the payoff of the asset and on the other hand there is the *indirect taxation effect* that affects the pricing functional by affecting the state prices. The following proposition combines these two effects.

3.4. Proposition: *Given the no-redistribution regime for an asset the following holds true:*

(a) if the correlation of the asset's payoff with the aggregate endowment is positive, i.e. the asset offers a higher payoff in the boom state than in the recession state, the assets equilibrium after-tax price increases in the tax rate λ,

(b) if the correlation of the asset's payoff with the aggregate endowment is negative, i.e. the asset offers a lower payoff in the boom state than in the recession state, the assets equilibrium after-tax price decreases in the tax rate λ.

(c) if the correlation of the asset's payoff with the aggregate endowment is zero, i.e. the asset offers a riskless payoff, the assets equilibrium after-tax price is independent of the tax rate λ.

To proof this recall

$$\pi_{\lambda r} + \pi_{\lambda b} = \frac{1}{1+r_{\lambda 0}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi_{\lambda r} = \frac{1}{1+(1-\lambda)\cdot r_0} - \pi_{\lambda b} \tag{60}$$

where r_0 is given endogenously. This implies

$$\Psi_\lambda(x) = x_\lambda \bullet \pi_\lambda^T = \frac{x_{\lambda r}}{1+(1-\lambda)\cdot r_0} + (x_{\lambda b} - x_{\lambda r})\cdot \pi_{\lambda b} \tag{61}$$

for an arbitrary payoff $x = (x_r; x_b)$ with after-tax payoff x_λ.

In a first step assume the payoff to be riskless, i.e. $x_r = x_b$. Then $(x_{\lambda b} - x_{\lambda r})\cdot \pi_{\lambda b} = 0$ and eq. (61) simplyfies to

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{x_r - \lambda\cdot(x_r - \Psi_\lambda(x))}{1+(1-\lambda)\cdot r_0},$$

since $x_\lambda = x - \lambda\cdot(x - \Psi_\lambda(x))$ in our tax system. This implies

$$\begin{aligned}(1+(1-\lambda)\cdot r_0)\Psi_\lambda(x) &= (1-\lambda)\cdot x_r + \lambda\cdot\Psi_\lambda(x)\\ \Leftrightarrow \quad \Psi_\lambda(x) &= \frac{x_r}{1+r_0} = \Psi(x)\end{aligned}$$

and proves (c) of the proposition. Note that this result of the proposition is the result of Samuelson (1964).

In a second step assume x to be a risky asset, i.e. $x_r \neq x_b$. Substituting (60) and $x_\lambda = x - \lambda\cdot(x - \Psi_\lambda(x))$ into eq. (61) yields

$$\begin{aligned}\Psi_\lambda(x) &= \frac{x_\lambda - \lambda\cdot(x_\lambda - \Psi_\lambda(x))}{1+(1-\lambda)\cdot r_0} + (1-\lambda)\cdot(x_{\lambda b} - x_{\lambda r})\cdot\pi_{\lambda b}\\ \Leftrightarrow \quad (1+r_0)\cdot\Psi_\lambda(x) &= x_r + (x_b - x_r)\cdot(1+r_{\lambda 0})\cdot\pi_{\lambda b}.\end{aligned}$$

Recalling $1 + r_{\lambda 0} = (\pi_{\lambda b} + \pi_{\lambda r})^{-1}$ allows to rewrite

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{x_r}{1+r_0} + \frac{x_b - x_r}{1+r_0}\cdot\frac{\pi_{\lambda b}}{\pi_{\lambda b}+\pi_{\lambda r}}, \tag{62}$$

where only the last term depends on the tax rate. Applying proposition 3.3 now shows that a positive (negative) sign of $(x_b - x_r)$ and an increasing tax rate leads to an increasing (decreasing) equilibrium price $\Psi_\lambda(x)$ of the asset.

We analyzed the no-redistribution regime assuming a negative tax base in the recession state (assumption 3.1). This assumption is necessary to derive results independent of agents preferences. Allowing for a positive tax base in the recession state would require some additional restrictions on the agents preferences to derive results similar to the ones of Stiglitz (1969).[44]

Discussing the in-out-redistribution regime in the next section we are able to omit the asummption of the negative tax base. Nevertheless we will obtain preference free results.

3.2.2 The in-out-redistribution regime

The in-out-redistribution regime is characterized by $L_\lambda = -T_\lambda$. That is the aggregate redistribution exactly offsets the aggregate tax payments and thus the aggregate net-tax-effect for the in-out-redistribution regime sums up to zero. As we assume identical agents this holds on individual level, too. Thus the pure taxation-effects discussed in the no-redistribution regime should be canceled out by the redistribution effects. Since this effect does not depend on any assumptions concerning the associated tax base this result holds for positive and for negative tax bases without any further restriction.[45]

We start with a obvious result according to the eqs. (38) and (39).

3.5. Proposition: *Assuming a in-out-redistribution regime the risk-neutral density ρ_λ and the risk-neutral probability vector q_λ are unaffected by the tax rate λ.*

Assuming a exogenously given riskless pre-tax return r_0 the riskless after-tax return $r_{\lambda 0}$ is strictly decreasing in the tax rate λ. In combination with eq. (59) this implies the following result.

3.6. Proposition: *Assuming a in-out-redistribution regime the state prices π_s are strictly increasing in the tax rate λ.*

Nevertheless given an exogenously riskless pre-tax return the equilibrium asset prices are independent of the prevailing tax rate.

3.7. Proposition: *Assuming a in-out-redistribution regime equilibrium price of any asset traded in the model is unaffected by the tax rate λ.*

Our last result is of particular interest. It states that given an in-out-redistribution regime linear taxation of the economic rent is a *neutral* tax system for our asset pricing model with risk-averse agents and bounded supply of risky assets.

[44] See section 1 for a discussion of selected results of Stiglitz (1969).

[45] Note, that within the in-out-redistribution regime a negative tax base implies a negative redistribution. We think of a negative redistribution as a capitation.

To see this (and to prove the proposition) we use the risk-neutral present value formula of eq. (23) for an arbitrary asset offering a pre-tax payoff x. The after-tax equilibrium price $\Psi_\lambda(x)$ of the asset is

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{I\!E^Q[x_\lambda]}{1 + r_{\lambda 0}}$$

which is equivalent to

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{I\!E^Q[x - \lambda \cdot (x - \Psi_\lambda(x))]}{1 + r_{\lambda 0}} \tag{63}$$

and

$$\left(1 - \frac{\lambda}{1 + r_{\lambda 0}}\right) \cdot \Psi_\lambda(x) = (1 - \lambda) \cdot I\!E^Q[x].$$

This last eq. can be rearranged to

$$(1 + r_{\lambda 0} - \lambda) \cdot \Psi_\lambda(x) = (1 - \lambda) \cdot \frac{I\!E^Q[x]}{1 + r_{\lambda 0}}.$$

Recall $r_{\lambda 0} = (1 - \lambda) \cdot r_0$ which implies $1 + r_{\lambda 0} - \lambda = (1 + r_0)(1 - \lambda)$. This allows to rewrite the last eq. from the upper algebraic rearrangements to

$$\Psi_\lambda(x) = \frac{I\!E^Q[x]}{1 + r_0}$$

where the right hand side of the eq. is the asset's equilibrium price in the absence of taxes.

3.2.3 Comparing the two regimes

To highlight the implications of our results we take a closer look on the redistribution effects within the in-out-redistribution regime. Recall that according to our assumptions 3.1

$$L_{\lambda r} = -T_{\lambda r} \leq 0 \quad \text{and} \quad L_{\lambda r} = -T_{\lambda r} \geq 0$$

holds true. Therefore the redistribution of the in-out-redistribution is state dependent and may be called *enforcing*, since it grants consumption opportunities in the boom state, and denies consumption opportunities in the recession state.

The following two corollaries discuss the effect of the redistribution within the in-out-redistribution regime.

3.8. Corollary: *Within the in-out-redistribution model the* **redistribution effects** *acts*

(a) positive on the risk-neutral density and the risk-neutral probability of the recession state

(b) negative on the stochastic discount factor and the state price of the recession state

and vice versa for the parameters of the boom state.

As a result the redistribution effect acts on assets equilibrium prices.

3.9. Corollary: *Within the in-out redistribution regime the* **redistribution effects** *acts*

(a) negatively on asset positively correlated to the pre-tax endowment of the economy,

(b) positively on asset negatively correlated to the pre-tax endowment of the economy, and

(c) no way on assets not correlated to the pre-tax endowment of the economy, i.e. riskless assets,

with respect to the asset's equilibrium prices.

This gives another light the *enforcement* of the in-out redistribution. Assuming a more realistic scenario than the one applied in our model where supply of risky assets are not perfectly inelastic would lead to the conclusion that a in-out redistribution regime could reduce volatility in pre-tax consumption opportunities. This is due to the fact that the reduction of prices of asset positively correlated to the pre-tax endowment of the economy implies that less cyclical investment projects, i.e. projects offering a positively correlated pre-tax payoff, may be realized (and vice versa).

4 An Example

In this section we present a numerical example in order to clarify our findings and to discuss an application of our model. As an application to corporate valuation we analyze whether the cost of capital of an endowment-asset is sensitive with respect to the tax rate. The set-up for the model (including the tax regime) is as described in section 2.1. While we first show the individual optimization problem, we then discuss equilibrium prices and the effect of a no-redistribution regime thereon. The cost of capital is then discussed in the presence of a no-redistribution regime.

4.1 Individual optimization

Let the payoff structure for the three endowment-assets $X = (x_0^T, x_1^T, x_2^T)$ be given by

$$x_0 = (10; 10), \quad x_1 = (90; 40) \quad \text{and} \quad x_2 = (10; 20). \tag{64}$$

Note that each pair of assets define a complete market, i.e. given the three assets of this example the market is *over*-complete. To show the individual portfolio optimization we assume the price vector to be

$$p = (9.0909; 57.6136; 13.9318).$$

Since the market is free of arbitrage we are able to derive the implicit state prices as

$$\pi_b = 0.42500 \quad \text{and} \quad \pi_r = 0.48409.$$

Given an initial portfolio of

$$\bar{h} = (1; 1; 1)$$

yields an "virtual" initial wealth of $i_0 = 80.6364$.

This initial wealth offers date 1 consumption opportunities that may be characterized by the following *consumption line*

$$c_b \mapsto c_r(c_b) = \frac{i_0}{\pi_r} - \frac{\pi_b}{\pi_r} \cdot c_b = 166.5728 - 0.8779 \cdot c_b. \tag{65}$$

This is the straight line in figure 3. Note that all combinations $c = (c_b; c_r)$ of this consumption line satisfy

$$c \bullet \pi^T = \sum_{s \in \Omega} c_s \cdot \pi_s = i_0.$$

The optimal portfolio of an agent with a utility function U now can be found by determining the utility indifference curve φ^* touching the consumption line.[46] Hence the payoff of the optimal portfolio is given by the osculation point $c^* = (c_b^*; c_r^*)$.

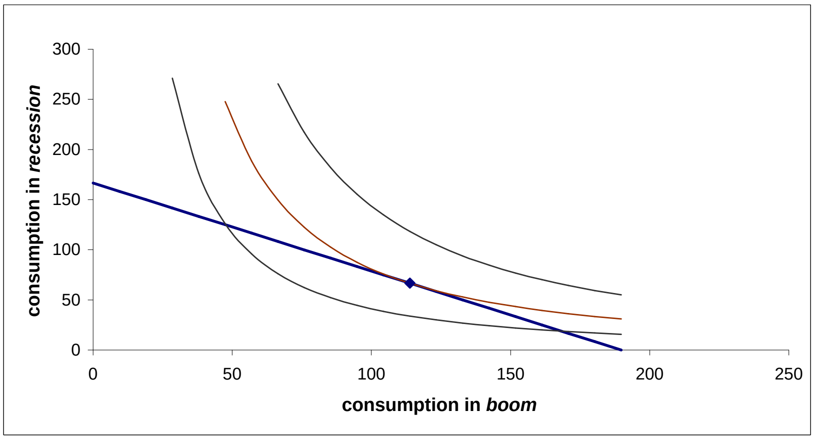


Figure 3: Individual portfolio choice given a price vector p

For a utility function U according to eq. (3) with $u(x) = \ln(x)$ and $\phi(b) = 60\%$ figure 3 shows the consumption line of the example and three indifference curves in the *state claim space*.[47]

The payoff of the optimal portfolio is then

$$c_b^* = 113.8396 \quad \text{and} \quad c_r^* = 66.6291, \tag{66}$$

yielding utility of $U(c^*) = 4.5205$. Note that there are infinite portfolios h offering this payoff. This is due to the markets over-completeness.

[46] See appendix A for the notion of indifference curves.

[47] See Hirshleifer & Riley (1979) for a similar figure and a extensive exposition on the graphical solution of the individual portfolio choice problem.

4.2 Equilibrium prices

Having solved the agents individual optimization problem we are moving to a macro-view considering the economy. By assumption there are N agents living in the economy, each with an utility function according to eq. (3) with $u(x) = \ln(x)$. Thus we assume agents to be characterized by a CRRA-utility function. This implies that the optimal portfolio choice is independent of the level of endowment, since for CRRA-utility functions the *line of optima* is a line through the origin (see figure 4).

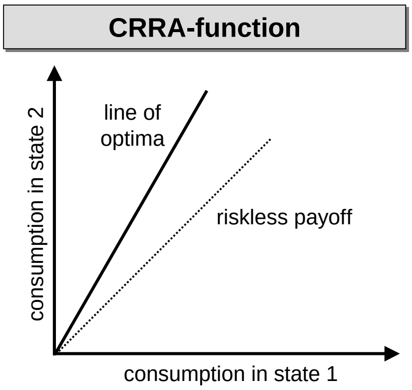


Figure 4: The line of optima for a CRRA-utility function

The state b probability is assumed to be $\phi_b = 60\%$. The aggregate initial endowment E_1 of the agents is given by by three *endowment*-assets. Each of these assets is assumed to be contracted in N identical securities, i.e. each agent holds a portfolio $\bar{h} = (1; 1; 1)$ of securities. The market portfolio is given by $h_m = (N; N; N)$. The payoff structure of the securities is given in eq. (64) of subsection 2.3. Therefore the agent of subsection 2.3 now can be thought of as a representative agent of the economy holding one security instead of the total asset. Since the N agents choosing their optimal portfolio simultaneously asset prices are derived according to eq. (20).

Assuming $r_0 = 10\%$ we easily calculate

(67) $$p_0 = 9.0909 \quad \text{and} \quad p_1 = 58.5624 \quad \text{and} \quad p_2 = 13.7421$$

for the assets and implicit state prices of

(68) $$\pi_b = 0.4440 \quad \text{and} \quad \pi_r = 0.4651.$$

The associated risk-neutral probabilities are

(69) $$q_b = 0,4884 \quad \text{and} \quad q_r = 0,5116.$$

4.3 Simulating the no-redistribution regime

In this subsection we discuss the no-redistribution model in the numerical set-up of subsection 4.2. Therefor we calculate

- ▷ the sensitivities of the risk-neutral probabilities q,
- ▷ the state prices pi,
- ▷ the assets equilibrium prices p, as well as
- ▷ the (after-tax) cost of capital k for each of the endowment-assets.

The (after-tax) cost of capital of an endowment-asset is defined as

$$k_i(\lambda) = \frac{I\!E^{\phi}[x_{\lambda i}]}{p_{\lambda i}} - 1, \qquad \text{for all } i = 0, 1, 2, \tag{70}$$

where $x_{\lambda i}$ denotes the after-tax payoff and $p_{\lambda i}$ the equilibrium price of the asset i in the presence of the no-redistribution regime. The simulation data for the four parameters q, pi, p, and k are given as a table in figure 5. The following figures visualize the effects graphically.

	Tax rate										
no-red.	**0%**	**10%**	**20%**	**30%**	**40%**	**50%**	**60%**	**70%**	**80%**	**90%**	**99,9%**
q_b	0,4884	0,4990	0,5099	0,5209	0,5321	0,5433	0,5547	0,5660	0,5774	0,5887	0,5999
q_r	0,5116	0,5010	0,4901	0,4791	0,4679	0,4567	0,4453	0,4340	0,4226	0,4113	0,4001
pi_b	0,4440	0,4578	0,4721	0,4868	0,5020	0,5175	0,5333	0,5495	0,5661	0,5829	0,5998
pi_r	0,4651	0,4596	0,4538	0,4477	0,4414	0,4349	0,4282	0,4213	0,4143	0,4072	0,4001
p_0	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909	9,0909
p_1	58,5624	59,0473	59,5408	60,0417	60,5487	61,0603	61,5752	62,0918	62,6085	63,1238	63,5725
p_2	13,7421	13,6451	13,5464	13,4462	13,3448	13,2425	13,1395	13,0362	12,9328	12,8298	12,7688
k_0	0,1000	0,0900	0,0800	0,0700	0,0600	0,0500	0,0400	0,0300	0,0200	0,0100	0,0001
k_1	0,1953	0,1669	0,1405	0,1161	0,0937	0,0732	0,0547	0,0382	0,0236	0,0109	0,0001
k_2	0,0188	0,0234	0,0268	0,0288	0,0295	0,0286	0,0262	0,0222	0,0165	0,0091	0,0001

Figure 5: Simulation data for the no-redistribution regime

Starting from marginal utilities figure 6 shows the risk-neutral probabilities for the sates. By including the riskless return figure 7 shows the state prices with respect

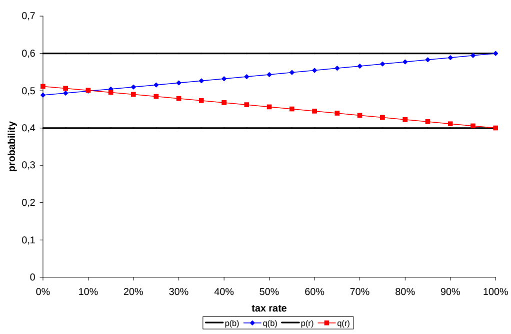


Figure 6: The risk-neutral probabilities with respect to the tax rate λ in the no-redistribution regime

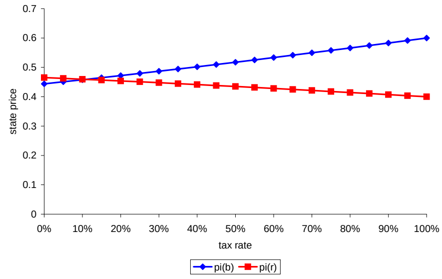


Figure 7: The state prices in the no-redistribution regime

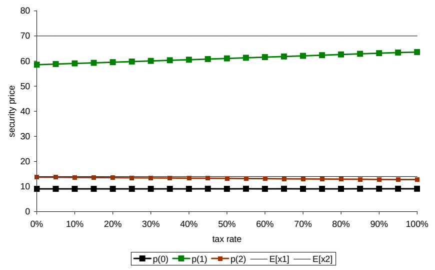


Figure 8: Equilibrium asset prices in the no-redistribution regime

to the tax rate. Figure 8 now shows the equilibrium asset prices with respect to the tax rate λ. Finally figure 9 shows the associated (after-tax) costs of capital of the endowment-assets with respect to the tax rate λ. Note that within our no-redistribution model the cost of capital of a risky asset is not linear in the tax rate. In fact it is not even obvious whether it is increasing or decreasing in the tax rate: the cost of capital of the anti-cyclic endowment asset 2 is increasing in the tax rate up to a tax rate of about 40% and decreasing in the tax rate thereafter.

To explain this effect we decompose the after-tax cost of capital into the after-tax riskless return and the risk-adjustment based on after-tax payoffs: While the first is linearly decreasing in the tax rate the second is a highly non-linear function (according to the utility function of the agents living in the economy) with negative values converging to zero. The combination yields the non-linear effect as shown in figure 9.

5 Conclusions

We were interested in the pricing mechanism of capital markets in equilibrium in the presence of a linear tax system applying the economic rent as tax base. The question whether the risk neutral probability measure transforming assets into a "fair game" depends on the prevailing tax rate served as starting point. Our analysis rests on a consumption-based equilibrium model with representative agents. Time and uncertainty were modeled using a one-step binominal model.

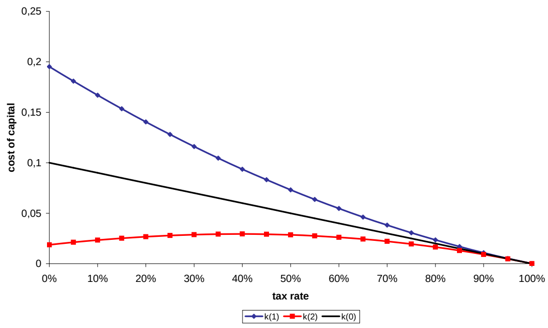


Figure 9: Associated (after-tax) costs of capital in the no-redistribution regime

Tax authorities do not only reduce consumption opportunities by taxation but also redistribute funds e.g. via subsidies and other government expenditures. Affecting the agents consumption opportunities redistribution enters their portfolio choice problem. We account for this fact and present a model that incorporates a tax-and-redistribution regime. Two redistribution regimes were discussed in detail: the no-redistribution and the in-out-redistribution regime. Since the no-redistribution model presumes that authorities entirely keep and consume their taxation revenues, we were able to discuss the *pure* effects of taxation by comparing the two different regimes. We derived preference-free taxation effects under the assumption of a negative tax base in the recession state. Similar results without the assumption of a negative tax base can be derived by following Stiglitz (1969). Then results depend on agents' preferences. In the case of the in-out-redistribution the taxation effects were directly offset by the redistribution effects. Negative redistribution is then interpreted as a capitation.

The results of the paper are threefold: first, we showed that in general the risk neutral probability measure depends on the prevailing tax rate. This implies that the neutrality result of Samuelson (1964) in general may not be transferred to an economy with risk averse agents and bounded supply of risky assets. Second under the rather strict assumptions of the in-out-redistribution regime and a non-negative tax base the risk neutral probability measure is independent of the prevailing tax rate. Under these assumptions the neutrality result of Samuelson (1964) holds for arbitrary assets, that is taxation may be ignored for valuation purposes. And finally, within our no-redistribution model it is by no means obvious that the (after-tax) cost of capital is decreasing in the tax rate.

A Indifference curves for EUH utility functions

Let U denote a UEH-utility function with respect to ϕ, i.e. there exists a von-Neumann-Morgenstern utility function u such that

$$U : x \mapsto \underbrace{\int_\Omega u(x)\phi(dx)}_{=\mathbb{E}^\phi[u(x)]}$$

holds. Furthermore let Λ_β denote the *indifference set* of all consumption plans offering utility β, that is

$$\Lambda_\beta = \{c \in \mathbb{R}^\Omega : U(c) = \beta\}. \tag{71}$$

In our two-date binominal model the set Λ_β may be characterized by the indifference curve

$$\varphi_\beta : c_b \mapsto \varphi_\beta(c_b), \tag{72}$$

where $\varphi_\beta(c_b)$ is implizitly given by

$$\phi_b \cdot u(c_b) + (1-\phi_b) \cdot u(\varphi_\beta(c_b)) = \beta. \tag{73}$$

Some algebraic rearrangements then yield

$$\varphi_\beta : c_b \mapsto u^{-1}\Big\{\frac{1}{1-\phi_b}\big(\beta - \phi_b \cdot u(c_b)\big)\Big\} \tag{74}$$

and

$$\varphi_\beta' : c_b \mapsto -\frac{\phi_b}{1-\phi_b} \cdot \frac{u'(c_b)}{u'\big(\varphi_\beta(c_b)\big)}, \tag{75}$$

where u^{-1} denotes the inverse function of u. In the example of $u : x \mapsto \ln(x)$ the inverse function u^{-1} is given by $u^{-1} : x \mapsto \exp\{x\}$. We then end up with

$$\varphi_\beta \quad : \quad c_b \mapsto \exp\Big\{\frac{1}{1-\phi_b}\big(\beta - \phi_b \cdot \ln(c_b)\big)\Big\} \tag{76}$$

$$\varphi_\beta' \quad : \quad c_b \mapsto -\frac{\phi_b}{1-\phi_b} \cdot \frac{\varphi_\beta(c_b)}{c_b} \tag{77}$$

Where φ_β' can be simplified using eq. (76)

$$\varphi_\beta' : c_b \mapsto -\frac{\phi_b}{1-\phi_b} \cdot \exp\left\{\frac{\beta - \phi_b \cdot \ln(c_b)}{(1-\phi_b)}\right\} \cdot \frac{1}{c_b}. \tag{78}$$

In order to derive equilibrium prices the indifference curve ϕ_{β^*} has to touch the consumption line in (e_b, e_r). This is done by enforcing the following restrictions

(1) $\varphi_{\beta^*}(e_b) = e_r$

(2) $\varphi'_{\beta^*}(e_b) = -\frac{\pi_r}{\pi_b}$

to hold true. Plugging restriction (1) into eq. (77) the last restriction yields

$$\frac{\pi_r}{\pi_b} = \frac{\phi_b}{1-\phi_b} \cdot \frac{e_r}{e_b}.$$

And β^* of course is given by eq. (73)

$$\beta^* = \phi_b \cdot \ln(e_b) + (1-\phi_b) \cdot \ln(e_r). \tag{79}$$

References

Atkinson, Anthony B. & Joseph E. Stiglitz (1980), *Lectures on Public Economics, Internatonal Edition*, McGraw-Hill.

Brealey, R. & Steward C. Myers (2003), *Principles of Corporate Finance*, McGraw-Hill.

Brunnermeier, Markus K. (2001), *Asset Pricing under Asymmetric Information*, Oxford University Press.

Buchholz, Wolfgang & Kai A. Konrad (2000), Risiko und Steuern, *in* N.Andel, ed., 'Probleme der Besteuerung III - Schriften des Vereins für Socialpolitik', Vol. 259/III, Dunker & Humbolt, pp. 63–139.

Cochrane, John H. (2001), *Asset Pricing*, Princeton University Press.

Copeland, Tom, Tim Koller & Jack Murrin (2000), *Valuation - Measuring and Managing the Value of Companies, 3rd Edt., University Edition*, John Wiley & Sons.

Domar, Evsey & Richard A. Musgrave (1944), 'Proportional income taxation and risk taking', *Quaterly Journal of Economics* **56**, 388–422.

Duffie, Darrell (1996), *Dynamic Asset Pricing Theory - 2nd ed.*, Princeton University Press.

Hens, Thorsten & Beate Pilgrim (2001), *General Equilibrium Foundations of Finance*, Kluwer Academic Publishers.

Hirshleifer, Jack & John G. Riley (1979), 'The analytics of uncertainty and information - an expository survey', *Journal of Economic Literature* **17**, 1375–1421.

Huang, Chi-Fu & Robert H. Litzenberger (1988), *Foundations of Financial Economics*, Prentice Hall.

Jensen, Bjarne Astrup (2003*a*), On valuation before and after tax in no arbitrage models: Tax neutrality in the continuous time model. Copenhagen Business School (Denmark), Version: 19th September 2003.

Jensen, Bjarne Astrup (2003*b*), On valuation before and after tax in no arbitrage models: Tax neutrality in the discrete time model. Copenhagen Business School (Denmark), Version: 1st September 2003.

Jin, Xing & Frank Milne (2003), Limited tax rebates, tax arbitrage and equilibrium in multi-period financial markets with general tax structures and transaction costs. Department of Mathematics, National University of Signapore.

Johannson, Sven-Erik (1969), 'Income taxes and investment decisions', *Swedish Journal of Economics* **71**, 104–110.

Johansson, Sven-Erik (1961), *Skatt - Investering - Värdering*, Norstedt & Söner.

Jones, Chris & Frank Milne (1992), 'Tax arbitrage, existence of equilibrium, and bounded tax rebates', *Mathematical Finance* **2**(3), 189–196.

Kirman, Alan P. (1992), 'Whom or what does the representative individual represent?', *Journal of Economic Perspectives.* **6**(2), 117–136.

LeRoy, Stephen F. & Jan Werner (2001), *Principles of Financial Economics*, Cambridge University Press.

Löffler, Andreas & Dirk Schneider (2000), Martingales, taxes, and neutrality. Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hannover.

Lintner, John (1965), 'Security prices, risk, and maximal gains from diversification', *The Journal of Finance* **20**(4), 587–615.

Lucas, Robert E. (1978), 'Asset prices in an exchange economy', *Econometrica* **46**, 1426–1446.

Myles, Gareth D. (1995), *Public Economics*, Cambridge University Press.

Niemann, Rainer (1999), 'Neutral taxation under uncertainty - a real option approach', *Finanzarchiv* **56**, 51–66.

Preinreich, Gabriel A. D. (1951), 'Models of taxation in the theory of the firm', *Economia Internazionale* pp. 372–397.

Richter, Frank (2004), 'Valuation with or without personal income taxes?', *sbr - Schmalenbachs Business Review* **56**, 20–45.

Richter, Wolfram F. (1986), 'Das Johnson-Samuelson-Theorem bewertungsneutraler Abschreibungen langlebiger Wirtschaftsgüterbei Einkommensbesteuerung', *Finanzarchiv* **44**, 435–449.

Ross, Stephen A. (1976), Return, risk and arbitrage, *in* I.Friend & J. L.Bicksler, eds, 'Risk and Return in Finance', Ballinger.

Ross, Stephen A. (1985), 'Debt and taxes under uncertainty', *The Journal of Finance* **60**(3), 637–657.

Ross, Stephen A., Randolph W. Westerfield & Jeffrey Jaffe (1999), *Corporate Finance, 5th ed.*, Irwin/McGraw-Hill.

Samuelson, Paul (1964), 'Tax deductibility of economic depreciation to insure invariant valuations', *The Journal of Political Economy* **72**, 604–606.

Sandmo, Agnar (1969), 'Capital risk, consumption and portfolio choice', *Econometrica* **37**(4), 586–599.

Sandmo, Agnar (1985), The effects of taxation on saving and risk taking, *in* A. J.Auerbach & M.Feldstein, eds, 'Handbook of Public Economics, Vol. I', Elsevier Science Publisher B.V., pp. 265–311.

Schwetzler, Bernhard & Maik Piehler (2004), Unternehmensbewertung bei Wachstum, Risiko und Besteuerung - die Anwendungsbedingungen der IDW S1 Wachstumsformel. HHL-Arbeitspapier, Nr. 56, Version 01/2004.

Sharpe, William (1964), 'Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk', *The Journal of Finance* **19**(3), 425–442.

Sharpe, William (1991), 'Capital asset prices with and without negative holdings', *The Journal of Finance* **46**(2), 489–509.

Stiglitz, Joseph E. (1969), 'The effects of income, wealth and capital gains taxation on risk taking', *Quaterly Journal of Economics* **83**, 263–283.

Stiglitz, Joseph E. (2000), *Economics of the Public Sector, Third Edition*, W.W. Norton & Company.

Wakker, Peter (1989), *Additive Representation of Preferences: A New Foundation of Decision Analysis*, Kluwer.

Jörg Wiese*

Unternehmensbewertung mit dem Nachsteuer-CAPM?

16. Februar 2004

- Version vom 29. April 2004 -

* Universität München, Fakultät für Betriebswirtschaft, Seminar für Rechnungswesen und Prüfung, Ludwigstr. 28 RG, 80539 München. Der Verfasser dankt Professor Dr. Dr. h.c. *Wolfgang Ballwieser*, Dipl.-Kfm. *Christian Schaffer*, MBR, sowie Professor Dr. Dr. *Andreas Löffler* für wertvolle Anregungen.

Abstract

In jüngerer Zeit verwenden Teile der Literatur das auf *Brennan* zurückgehende Nachsteuer-CAPM, um Unternehmenswerte nach (differenzierten) persönlichen Steuern zu bestimmen. In diesem Beitrag wird das Modell auf drei unterschiedliche Steuersätze erweitert. Gezeigt wird, dass das Nachsteuer-CAPM nicht zur Diskontierung von Nettocashflows verwendet werden darf, da es Bruttorenditen erzeugt. Daneben sprechen ein prohibitiver Datenbeschaffungsaufwand sowie methodische Probleme bei der Formulierung von Bewertungsgleichungen gegen die Verwendung des Modells für die Unternehmensbewertung. Zuletzt wird ein Überblick über empirische Studien gegeben, die nicht zweifelsfrei belegen können, dass das Nachsteuer-CAPM die Realität gut beschreibt.

Keywords: valuation; Capital Asset Pricing Model (CAPM); differential personal taxes; Unternehmensbewertung; differenzierte persönliche Steuern; tax CAPM; Steuer-CAPM; Nachsteuer-C APM.

JEL-Classification: G11, G12, H24.

Inhalt

1. Problemstellung

Die Erfassung persönlicher Steuern in der Unternehmensbewertung ist seit jeher strittig. Zwar besteht Einigkeit darüber, dass sie grundsätzlich nicht unternehmenswertneutral sind und daher in den Kalkül integriert werden müssen.[1] Dies folgt unmittelbar als Umkehrschluss aus engen Irrelevanzbedingungen. Unterschiedliche Auffassungen bestehen indes darüber, wie Steuern in einer Welt unsicherer Erwartungen adäquat in den Unternehmensbewertungskalkül zu integrieren sind. In jüngerer Zeit verweist die Literatur vermehrt auf das von *Brennan*[2] entwickelte Nachsteuer-CAPM.[3] Hintergrund dessen ist unter anderem, dass dieses Modell differenzierte Steuersätze auf unterschiedliche Einkünfte aus Kapitalmarktanlagen erfasst. Seit Einführung des Halbeinkünfteverfahrens scheint das Modell daher auch für das deutsche Steuersystem geeignet zu sein.

Der Beitrag prüft, inwieweit das Nachsteuer-CAPM zur Diskontierung von Nettoüberschüssen geeignet ist. Hierzu wird ausgehend von den Überlegungen *Brennan*s ein Nachsteuer-CAPM abgeleitet, das differenzierte Steuersätze auf Zinseinkünfte, Dividenden sowie Kursgewinne enthält.[4] Bestehende, analytisch gewonnene, Modellversionen unterscheiden nur zwei Steuersätze.[5] Die hier vorgestellte allgemeinere Darstellung mit drei differenzierten Sätzen erlaubt es, unterschiedliche Steuerregime – etwa das deutsche mit und ohne Kursgewinnsteuern – im Modell zu betrachten.[6]

Ausgehend davon wird gezeigt, dass das Nachsteuer-CAPM grundsätzlich nicht zur Diskontierung von Nettoüberschüssen geeignet ist, weil es *Brutto*renditen erzeugt, die um die Annahme der Existenz differenzierter persönlicher Steuern adjustiert sind. Wie diese in *Netto*renditen umgewandelt werden können, die zur Bewertung von Nettocashflows geeignet wären, ist offen. Das in der Literatur verbreitete Vorgehen, die Gleichgewichtsbeziehung des Nachsteuer-CAPM als Nettorendite zu interpretieren oder das Standard-CAPM um

---

[1] Vgl. etwa *Moxter* (1983), S. 177-178; *Ballwieser* (1995), S. 36; *Richter* (2002), S. 326-330; *IDW* (2000), S. 830, Tz. 51.

[2] Vgl. *Brennan* (1970); a. *Litzenberger/Ramaswamy* (1979).

[3] Vgl. etwa *Drukarczyk/Richter* (1995), S. 562; *Richter* (2004), S. 20-21; *Schmidbauer* (2002), S. 1256; *Schultze* (2003), S. 275; *Schwetzler/Piehler* (2004), S. 14-15.

[4] Damit werden sämtliche im CAPM betrachteten Einkunftsarten differenziert besteuert.

[5] Vgl. *Brennan* (1970), S. 420; *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 167; *Weigel* (1989), S. 119; *König* (1990), S. 103 und S. 113; *Elton/Gruber/Brown/Goetzmann* (2003), S. 331.

[6] Wenn man unterstellt, dass Investoren oft keine Steuern auf Kursgewinne zu entrichten haben, sind im deutschen Steuerregime gegenwärtig zwar nur die Steuersätze auf Zins- und Dividendeneinkommen zu unterscheiden. Mit der Zinsabgeltungssteuer und der im Rahmen des Steuervergünstigungsabbaugesetzes vorgesehenen Pauschalsteuer auf Kursgewinne sollte jedoch noch im Jahr 2003 auf ein System mit drei differenzierten Sätzen übergegangen werden. Vgl. *BMF* (Hrsg.) (2003b), S. 11; *BMF* (Hrsg.) (2003a), S. 3-4.

differenzierte Steuersätze anzureichern, und die gewonnenen Zinssätze zur Diskontierung zu verwenden, wird als theoretisch ungeeignet gekennzeichnet. Vor diesem Hintergrund sind auch von der Literatur formulierte Bedingungen für die Unternehmenswertirrelevanz der Besteuerung in einem anderen Licht zu sehen.

Daneben werden Datenbeschaffungsprobleme diskutiert, die mit der Verwendung des Nachsteuer-CAPM in der *Brennan*schen Prägung einhergehen. Offensichtlich wird, dass das Modell in Reinform nicht umsetzbar ist. Daher werden Lösungsansätze diskutiert, mit deren Hilfe man für die praktische Implementierung vereinfacht vorgehen kann. Weiterhin wird anhand empirischer Studien untersucht, inwieweit das Nachsteuer-CAPM eine geeignete Beschreibung der Realität liefert. Abschließend wird gezeigt, dass sich Steuern auch differenziert erfassen lassen, wenn man Risikozuschläge mit Hilfe von Sicherheitsäquivalenten der Ertragsverteilungen gewinnt.

Es ist nicht Anliegen dieses Beitrags, das deutsche Steuersystem in allen seinen Feinheiten im Modell abzubilden. Insbesondere bleiben Progressionseffekte vereinfachend außer Acht. Daneben wird die Kirchensteuer nicht in den Kalkül integriert.

Der Beitrag ist folgendermaßen aufgebaut: Abschnitt 2 kennzeichnet das zugrundegelegte Steuersystem. In Abschnitt 3 wird ein Nachsteuer-CAPM mit drei differenzierten Steuersätzen entwickelt. Darauf aufbauend wird seine Verwendbarkeit für die Unternehmensbewertung diskutiert und auf Datenbeschaffungsprobleme sowie empirische Ergebnisse eingegangen. In Abschnitt 4 werden Bewertungsgleichungen und Bedingungen für die Irrelevanz der Besteuerung auf Grundlage des CAPM sowie von Sicherheitsäquivalenten der Ertragsbandbreiten formuliert. Der Beitrag schließt mit zusammenfassenden Thesen.

2. Steuersystem

Ausgegangen wird von unbeschränkt steuerpflichtigen inländischen Privatpersonen, die im Stande und willens sind, das zu bewertende Unternehmen aus eigenen Mitteln zu erwerben, und es zu diesem Zwecke bewerten.[7] „Bewerten heißt vergleichen“.[8] Verglichen wird die Unternehmenstransaktion mit einer Handlungsalternative. Persönliche Steuern greifen auf

[7] Kreditaufnahmen sind somit nicht erforderlich. Vgl. zu deren Einbeziehung *Husmann/Kruschwitz/Löffler* (2002). Betont sei, dass das deutsche Steuersystem hier nur idealisiert abgebildet wird. Daneben sind die Steuersätze annahmegemäß intertemporal konstant.

[8] *Moxter* (1983), S. 123.

beide Alternativen unterschiedlich zu. In welcher Form dies geschieht, hängt zunächst von der Rechtsform des Bewertungsobjekts ab.

Handelt es sich dabei um eine Personengesellschaft, so hat ein Investor mit einem Satz s_e Einkommensteuer auf Einkünfte aus Gewerbebetrieb zu entrichten, unabhängig davon, ob der Gewinn entnommen wird oder im Unternehmen verbleibt.[9] Rechnet man den Solidaritätszuschlag hinzu, der gegenwärtig 5,5 % beträgt, so ergibt sich der im Folgenden zugrunde gelegte Einkommensteuersatz $\hat{s}_e := 1{,}055 \cdot s_e$.[10] Als Bemessungsgrundlage dient vereinfachend der Cashflow $\tilde{C}$ des Unternehmens.[11] Für Kapitalgesellschaften wird unterstellt, dass $\tilde{C}$ nur aus Dividenden $\tilde{D}$ besteht $\left(\tilde{C} = \tilde{D}\right)$, die aufgrund des Halbeinkünfteverfahrens mit dem Satz $\tau := 0{,}5 \cdot \hat{s}_e$ besteuert werden.[12]

Mit Blick auf die Handlungsalternative kann man unterscheiden, ob diese in einer Anlage zum risikofreien Zinssatz $r_f = q - 1$[13] oder in riskanten Wertpapieren liegt. Um das Risiko zu erfassen, kann in ersterem Fall auf Sicherheitsäquivalente nach Maßgabe der Erwartungsnutzentheorie zurückgegriffen werden, die durch die Ertragsbandbreite des Bewertungsobjekts impliziert werden. Während die Nachsteuerrendite der risikofreien Anlage durch $\left(1 - \hat{s}_e\right) \cdot r_f$ definiert ist, ergeben sich die in den Risikozuschlag einfließenden Steuersätze in Abhängigkeit von der Rechtsform des Bewertungsobjekts.[14] Im zweiten Fall kann das CAPM zur Risikoadjustierung dienen. Dann tritt neben $\left(1 - \hat{s}_e\right) \cdot r_f$ eine (annahmegemäß deterministische[15]) Dividendenrendite $\delta_j = D_j \cdot \left(p_j^0\right)^{-1}$, die sich wegen des Halbeinkünfteverfahrens nach Steuern als $\left(1 - \tau\right) \cdot \delta_j$ darstellt. Abhängig von der Realisationsstrategie der Investoren kann zusätzlich die Kursrendite $\tilde{\rho}_j = \left(\tilde{\pi}_j - p_j^0\right) \cdot \left(p_j^0\right)^{-1}$ mit

9 Vgl. *Husmann/Kruschwitz/Löffler* (2002), S. 26-27.

10 Für die Kirchensteuer wird vorausgesetzt, dass die Investoren sie vermeiden. Vernachlässigt man Details, so wirkt sie wie der Solidaritätszuschlag, der hier berücksichtigt wird.

11 Zu Abweichungen von Bemessungsgrundlage und Zahlungsebene vgl. *Drukarczyk* (2003), S. 144-164; *Drukarczyk/Richter* (1995), S. 564-566. Der Überschuss $\tilde{C}$ ist nach Unternehmenssteuern definiert. Die Abzugsfähigkeit der Gewerbesteuer von der Bemessungsgrundlage der Einkommensteuer wird ausgeblendet.

12 Zu beachten ist, dass die Steuersätze Mittelwerten der mit der Unternehmenstransaktion befassten Investoren entsprechen müssen.

13 q ist der Stückpreis für das risikolose Wertpapier in t = 1. In t = 0 beträgt der Preis 1.

14 Vgl. Abschnitt 4.

15 Vgl. analog *Brennan* (1970), S. 420; *Long* (1977), S. 27; *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 166; *König* (1990), S. 68; *Elton/Gruber/Brown/Goetzmann* (2003), S. 330. Der Index j (j = 1,...,N) bezeichnet das betrachtete Wertpapier.

einem Steuersatz γ belastet werden, so dass nach Steuern $(1-\gamma)\cdot\tilde{\rho}_j$ gilt.[16] Bei p_j^0 und $\tilde{\pi}_j$ handelt es sich um den Stückpreis des Wertpapiers j vor Steuern in t = 0 und t = 1. Das gekennzeichnete Steuerregime wird im Folgenden zur Ableitung des Nachsteuer-CAPM unterstellt.

3. Nachsteuer-CAPM mit drei differenzierten Steuersätzen

3.1 Das Modell

Betrachtet werden K Anleger, die mit k (k = 1,...,K) indiziert seien. Abgeleitet werden erst Gleichgewichtsbeziehungen für individuelle Anleger k, die anschließend zum Marktgleichgewicht aggregiert werden. Neben den üblichen Prämissen, die zum Vorsteuer-CAPM führen, ist proportionale Besteuerung unterstellt, wobei die Steuersätze von Anleger zu Anleger variieren können. Das erwartete Nettoendvermögen $\bar{V}_k$ des Akteurs k aus seinem Portfolio ist[17]

$$\bar{V}_k = \sum_{j=1}^{N}\left[\bar{\pi}_j - \left(\bar{\pi}_j - p_j^0\right)\cdot\gamma_k + D_j\cdot(1-\tau_k)\right]\cdot X_{jk} + \left[q-(q-1)\cdot\hat{s}_{ek}\right]\cdot X_{rk}\,. \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet $\bar{\pi}_j$ den Erwartungswert von $\tilde{\pi}_j$. Bei $X_{\bullet k}$ und $X_{\bullet k}^0$ handelt es sich um die Anzahl an Wertpapieren, die ein Entscheider k in t = 1 und t = 0 hält. Ist $\sigma\left(\tilde{\pi}_j\tilde{\pi}_i\right)$ für $j=1,...,N; i=1,...,N$ die Kovarianz der Wertpapierpreise in t = 1, so ergibt sich die Portfolio-Varianz mit

$$\sigma_{\bar{V}_k}^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma\left(\tilde{\pi}_j\tilde{\pi}_i\right)\cdot X_{jk}\cdot X_{ik}\cdot(1-\gamma_k)^2\,. \tag{3.2}$$

Unter Beachtung der Budgetrestriktion

---

[16] Die Höhe von γ bleibt im Folgenden unspezifiziert $(0\le\gamma<1)$. Orientiert man sich am Entwurf des Steuervergünstigungsabbaugesetzes, so gilt bei Vernachlässigung der Freigrenze von 1000€ und unter Beachtung des Halbeinkünfteverfahrens sowie des Solidaritätszuschlags $\gamma = 0,079125$. Vgl. *BMF* (Hrsg.) (2003a), S. 3-4. Allerdings sollte die Spekulationsfrist wegfallen, so dass es sich bei γ um einen definitiven Steuersatz handelte. Letzteres wird im Folgenden nicht immer unterstellt. Im gegenwärtig herrschenden deutschen Steuersystem werden Kursgewinne auf Wertpapiere, die kürzer als ein Jahr gehalten werden, zum halben persönlichen Einkommensteuersatz $0,5\cdot\hat{s}_e = \tau$ und damit grundsätzlich gleich wie Dividenden besteuert. Steuerfrei bleiben Kursgewinne nur dann, wenn der Investor weniger als 1 % der Anteile des Bewertungsobjekts hält und diese nach Ablauf der Spekulationsfrist veräußert.

[17] Vgl. zum folgenden grundsätzlichen Vorgehen *Brennan* (1970), S. 420-421.

$$\sum_{j=1}^{N} p_j^0 \cdot \left(X_{jk} - X_{jk}^0\right) + \left(X_{rk} - X_{rk}^0\right) = 0 \tag{3.3}$$

maximiert jeder Akteur seinen erwarteten Nutzen von $\tilde{V}_k$, der durch eine (konkave, monoton steigende, zweimal differenzierbare) *von Neumann/Morgenstern*-Nutzenfunktion[18] $Q_k\left(\tilde{V}_k\right)$ beschrieben ist. Das Nettoendvermögen und die Nettorenditen seien normalverteilt.[19] Daher kann direkt das Präferenzfunktional $U_k = U_k\left(\bar{V}_k, \sigma^2_{\bar{V}_k}\right)$ maximiert werden. Aus der *Lagrange*funktion L_k [20]

$$L_k = U_k\left(\bar{V}_k, \sigma^2_{\bar{V}_k}\right) - \lambda_k \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} p_j^0 \cdot \left(X_{jk} - X_{jk}^0\right) + \left(X_{rk} - X_{rk}^0\right)\right) \tag{3.4}$$

ergeben sich für $U_k' = \dfrac{\partial U_k\left(\bar{V}_k, \sigma^2_{\bar{V}_k}\right)}{\partial \bar{V}_k} > 0$ (Nichtsättigung) und $U_k'' = \dfrac{\partial U_k\left(\bar{V}_k, \sigma^2_{\bar{V}_k}\right)}{\partial \sigma^2_{\bar{V}_k}} < 0$ (Varianzaversion) die Bedingungen erster Ordnung $\forall\ j = 1, \ldots, N+1$:

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_{jk}} = U_k' \cdot \frac{\partial \bar{V}_k}{\partial X_{jk}} + U_k'' \cdot \frac{\partial \sigma^2_{\bar{V}_k}}{\partial X_{jk}} - \lambda_k \cdot p_j^0 = 0, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_{rk}} = U_k' \cdot \left[q - (q-1) \cdot \hat{s}_{ek}\right] - \lambda_k = 0\,. \tag{3.6}$$

Aus (3.1) und (3.2) erkennt man $\forall\ j = 1, \ldots, N$ [21]

$$\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial X_{jk}} = \bar{\pi}_j - \left(\bar{\pi}_j - p_j^0\right) \cdot \gamma_k + D_j \cdot \left(1 - \tau_k\right), \tag{3.7}$$

---

18 Vgl. grundlegend *Neumann/Morgenstern* (1967), S. 24-29 und S. 642-657.

19 Damit verhalten sich die Entscheider rational im Sinne der *Bernoulli*-Theorie, wenn sie allein auf Basis des Erwartungswerts und der Varianz der Renditen entscheiden. Um dies zu erreichen, kann man alternativ von quadratischen Nutzenfunktionen ausgehen. Vgl. *Tobin* (1958), S. 74-76. Letzteres ist bei Vorliegen nichtlinearer Besteuerungsfunktionen zwingend, da die Nettoendvermögen der Investoren dann nicht normalverteilt sind. Vgl. *Singer* (1979), S. 611. Allerdings ist die Normalverteilungsannahme für den Kapitalmarkt falsch und die Quadratfunktion unplausibel. Beide Probleme lassen sich pragmatisch umgehen, wenn man das μ-σ-Kriterium nicht dem Bernoulli-Prinzip unterordnet, sondern als alternative Art der Modellierung von Entscheidungen unter Unsicherheit begreift und direkt eine μ-σ-Nutzenfunktion maximiert. Vgl. dazu *Löffler* (2001), S. 51.

20 Vgl. a. *König* (1990), S. 98. λ_k bezeichnet den *Lagrange*-Multiplikator.

21 Die Ableitung der Varianz nach X_{rk} ist gleich 0. *Brennan* (1970), S. 421, unterläuft bei der Differentiation der Varianz in (3.8) ein Fehler. In seiner Rechnung enthält (3.8) neben X_{ik} auch X_{jk}.

$$\frac{\partial \sigma^2_{\tilde{V}_k}}{\partial X_{jk}} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{N} \sigma\left(\tilde{\pi}_j, \tilde{\pi}_i\right) \cdot X_{ik} \cdot \left(1-\gamma_k\right)^2, \tag{3.8}$$

was eingesetzt in (3.5) $\forall\ j = 1,\ldots,N$ die Optimalitätsbedingung

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_{jk}} = U'_k\left[\bar{\pi}_j - \left(\bar{\pi}_j - p_j^0\right)\gamma_k + D_j\left(1-\tau_k\right)\right] + U''_k\left[2\sum_{i=1}^{N}\sigma\left(\tilde{\pi}_j, \tilde{\pi}_i\right)X_{ik}\left(1-\gamma_k\right)^2\right] - \lambda_k p_j^0 = 0 \tag{3.9}$$

erzeugt. Gleichsetzen von (3.9) und (3.6) führt auf

$$\sum_{i=1}^{N}\sigma\left(\tilde{\pi}_j, \tilde{\pi}_i\right) \cdot X_{ik} = \frac{t_k}{\left(1-\gamma_k\right)^2} \cdot \left[\bar{\pi}_j \cdot \left(1-\gamma_k\right) + p_j^0 \cdot \gamma_k + D_j \cdot \left(1-\tau_k\right) - \left(q - \left(q-1\right) \cdot \hat{s}_{ek}\right) \cdot p_j^0\right], \tag{3.10}$$

wobei $t_k = -U'_k / 2 \cdot U''_k$ die (hälftige) globale Risikotoleranz[22] als Kehrwert der absoluten Risikoaversionsfunktion[23] des Investors k im Optimum ist. Erfüllt der Akteur k (3.10) und (3.3) $\forall\ j = 1,\ldots,N+1$, so befindet er sich individuell im Gleichgewicht. Um zum Kapitalmarktgleichgewicht zu gelangen, ist sicherzustellen, dass der Markt geräumt ist. Dies ist gegeben, wenn die Mengen X_{jk}^0 der in t = 0 angebotenen gleich den Mengen X_{jk} der in t = 1 nachgefragten Finanztitel sind:[24]

$$\sum_{k=1}^{K} X_{jk} = \sum_{k=1}^{K} X_{jk}^0 := X_j^0 \qquad \forall\ j = 1,\ldots,N+1. \tag{3.11}$$

Durch Aggregation von (3.10) über die Anleger k erhält man

$$\Delta \cdot \sum_{i=1}^{N}\sigma\left(\tilde{\pi}_j, \tilde{\pi}_i\right) \cdot X_{ik} = \left(\bar{\pi}_j + D_j - qp_j^0\right) - \theta_{\gamma_k} \cdot \left(\bar{\pi}_j - p_j^0\right) - \theta_{\tau_k} \cdot D_j + \theta_{\hat{s}_{ek}} \cdot p_j^0 \cdot \left(q-1\right) \tag{3.12}$$

mit $\Delta = \left[\sum_{k=1}^{K}\frac{t_k}{\left(1-\gamma_k\right)^2}\right]^{-1}$, $\theta_{\gamma_k} = \Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{t_k\gamma_k}{\left(1-\gamma_k\right)^2}$, $\theta_{\tau_k} = \Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{t_k\tau_k}{\left(1-\gamma_k\right)^2}$ und $\theta_{\hat{s}_{ek}} = \Delta\sum_{k=1}^{K}\frac{t_k\hat{s}_{ek}}{\left(1-\gamma_k\right)^2}$.[25]

Die Parameter $\theta_{\gamma_k}, \theta_{\tau_k}$ und $\theta_{\hat{s}_{ek}}$ sind gewogene Durchschnitte der Steuersätze der im Markt befindlichen Akteure. Sie sind abhängig von den investorenspezifischen Risikotoleranzen.[26]

---

22 Vgl. *Brennan* (1970), S. 421; *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 166; *König* (1990), S. 99; *Rubinstein* (1973), S. 613-615.

23 Vgl. grundlegend *Pratt* (1964), S. 125; *Arrow* (1971), S. 94.

24 Vgl. hierzu und im Folgenden *Brennan* (1970), S. 422.

25 Der Parameter θ_{τ_k} tritt bei *Brennan* (1970), S. 422, nicht auf, da dieser von einer Besteuerung der Zinseinkünfte mit dem Dividendensteuersatz ausgeht.

Da sich das im weiteren mit M indizierte Marktportfolio (vor Steuern) als gewichtete Summe der wertmäßigen Beiträge der einzelnen Wertpapiere j darstellen lässt[27], kann (3.12) über[28]

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\sigma\left(\tilde{\pi}_j, \tilde{\pi}_i\right)}{p_j^0} \cdot X_i^0 = \sigma\left(\tilde{\rho}_j, \tilde{\rho}_M\right) := \sigma_{jM} \tag{3.13}$$

durch Division mit p_j^0 auf Basis von Renditen dargestellt werden:

$$\bar{r}_j - r = \Omega \cdot \sigma_{jM} - r_f \cdot \Phi + \delta_j \cdot \Psi \tag{3.14}$$

mit $\Phi = \dfrac{\left(\theta_{\hat{s}_{ek}} - \theta_{\gamma_k}\right)}{\left(1 - \theta_{\gamma_k}\right)}, \Psi = \dfrac{\left(\theta_{\tau_k} - \theta_{\gamma_k}\right)}{\left(1 - \theta_{\gamma_k}\right)}$.

Die „gebräuchliche“ Darstellung des CAPM ergibt sich durch Multiplikation von (3.14) mit $p_j^0 \cdot X_j^0$ und Summation über j, womit für Ω folgt[29]

$$\Omega = \frac{\bar{r}_M - r_f + r_f \cdot \Phi - \delta_M \cdot \Psi}{\sigma_M^2}. \tag{3.15}$$

Damit stellt sich das Kapitalmarktgleichgewicht als lineare Beziehung der Form[30]

$$\bar{r}_j = r_f \cdot \left(1 - \Phi\right) + \beta_j \cdot \left(\bar{r}_M - \delta_M \cdot \Psi - r_f \cdot \left(1 - \Phi\right)\right) + \Psi \cdot \delta_j \tag{3.16}$$

---

26 Vgl. *Brennan* (1970), S. 422; *Modigliani* (1982), S. 258-259; *Elton/Gruber/Brown/Goetzmann* (2003), S. 330.

27 Vgl. *Brennan* (1970), S. 422-423.

28 σ_{jM} bezeichnet die Kovarianz zwischen $\tilde{\rho}_j$ und der Kursrendite des Marktportfolios $\tilde{\rho}_M$.

29 Vgl. für andere Steuersysteme *Brennan* (1970), S. 422; *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 164; *Weigel* (1989), S. 119; *Elton/Gruber/Brown/Goetzmann* (2003), S. 331. Bei δ_M handelt es sich um die Dividendenrendite, bei σ_M^2 um die Varianz der Rendite $\tilde{r}_M$ des Marktportfolios.

30 Dass der Klammerterm in (3.16) korrekt ist, kann überprüft werden, indem das Wertpapier j gleich dem Marktportfolio gesetzt wird, was $\beta_j = 1$ und $\delta_M = \delta_j$ impliziert. Dann folgt $\bar{r}_j = \bar{r}_M$. Vgl. *Elton/Gruber/Brown/Goetzmann* (2003), S. 321, und in diesem Sinne a. *Ollmann/Richter* (1999), S. 169. Ferner muss für $\hat{\gamma}_k = \hat{\tau}_k = \hat{s}_{ak} = 0$ das Standard-CAPM resultieren, was sich leicht zeigen lässt. Das Gleichgewicht (3.16) lässt sich formal problemlos ableiten. Unklar ist jedoch, ob derartige Gleichgewichte existieren und eindeutig sind. Hintergrund dessen sind Möglichkeiten zur „Steuer-Arbitrage“, die sich bei differenzierter Besteuerung der Einkunftsarten ergeben können, wenn sich die Investoren in unterschiedlichen Steuerklassen befinden. Dieses Problem lässt sich etwa durch die geeignete Gestaltung des Steuersystems oder die Einführung von Leerverkaufsbeschränkungen lösen. Vgl. dazu *Schaefer* (1982); *Auerbach/King* (1983); *Dammon/Green* (1987).

dar.[31] Während $\beta_j = \sigma_{jM} \cdot \left(\sigma_M^2\right)^{-1}$ gegenüber der Grundform des CAPM unverändert bleibt, ist der Marktpreis des Risikos abhängig von den (aggregierten) Steuersätzen der Investoren. Darüber hinaus prägt als wertpapierspezifische Variable neben β_j die Dividendenrendite δ_j die erwartete Rendite eines Wertpapiers j. Das Gleichgewicht (3.16) enthält im Gegensatz zu den in Fn. 5 genannten Modellen drei unterschiedliche Steuersätze (Steuersystem 1).

Besteuert man Dividenden und Zinseinkünfte gleich und differenziert von Kursgewinnsteuern $\left(\gamma_k \neq \tau_k = \hat{s}_{ek}\ \forall\ k\right)$ (Steuersystem 2), so folgt aus (3.16) das *Brennan*-Modell[32]

$$\bar{r}_j = r_f + \beta_j \cdot \left(\bar{r}_M - \Phi \cdot \delta_M - r_f \cdot (1-\Phi)\right) + \Phi \cdot \left(\delta_j - r_f\right), \tag{3.17}$$

wobei Φ wie oben definiert ist.

Vernachlässigt man Kursgewinnsteuern $\left(\gamma_k = 0 < \tau_k \neq \hat{s}_{ek} < 1\ \forall\ k\right)$ (Steuersystem 3), so ergibt sich (3.16). Wegen $\theta_{\gamma_k} = 0$ resultiert $\Phi = \theta_{\hat{s}_{ek}}$ und $\Psi = \theta_{\tau_k}$. Dabei gilt $\Delta = \left[\sum_{k=1}^{K} t_k\right]^{-1}$,

$\theta_{\tau_k} = \Delta \sum_{k=1}^{K} t_k \tau_k$ und $\theta_{\hat{s}_{ek}} = \Delta \sum_{k=1}^{K} t_k \hat{s}_{ek}$.

Werden Kursgewinne und Zinsen gleich besteuert $\left(\tau_k \neq \gamma_k = \hat{s}_{ek}\ \forall\ k\right)$ (Steuersystem 4), so vereinfacht sich (3.16) über $\theta_{\gamma_k} = \theta_{\hat{s}_{ek}} = \Delta \sum_{k=1}^{K} \frac{t_k \hat{s}_{ek}}{\left(1-\hat{s}_{ek}\right)^2}$ und folglich $\Phi = 0$ zu

$$\bar{r}_j = r_f + \left(\bar{r}_M - r_f - \delta_M \cdot \Psi\right) \cdot \beta_j + \delta_j \cdot \Psi . \tag{3.18}$$

Für die Substitute gilt $\Psi = \frac{\left(\theta_{\tau_k} - \theta_{\hat{s}_{ek}}\right)}{\left(1-\theta_{\hat{s}_{ek}}\right)}$, $\theta_{\tau_k} = \Delta \sum_{k=1}^{K} \frac{t_k \tau_k}{\left(1-\hat{s}_{ek}\right)^2}$ und $\Delta = \left[\sum_{k=1}^{K} \frac{t_k}{\left(1-\hat{s}_{ek}\right)^2}\right]^{-1}$.

---

31 Zu einer sehr ähnlichen Beziehung gelangt *Lally* (1992), S. 39-41, für ein Anrechnungssystem, ohne allerdings die hier gezeigte Optimierung durchzuführen. Folge dessen ist, dass in den Steuerparametern $\theta_{\gamma_k}, \theta_{\hat{s}_{ek}}$ und θ_{τ_k} andere Gewichte die Durchschnittsbildung bestimmen. Während hier die globalen Risikotoleranzen t_k als Gewichte dienen, sind es in *Lally*s Ansatz die im Gleichgewicht von den Investoren gehaltenen Anteile am gesamten Marktwert der riskanten Titel. Anders als bei t_k muss inhaltlich unklar bleiben, wie sich diese Gewichte bilden.

32 Vgl. *Brennan* (1970), S. 423. Dass das Modell von *Brennan* Kursgewinnsteuern erfasst, wird teils übersehen. Vgl. etwa *Schwetzler/Piehler* (2004), S. 6.

Für den Fall, dass Kursgewinne und Dividenden dem gleichen Steuersatz unterliegen $\left(\tau_k = \gamma_k \neq \hat{s}_{ek}\ \forall\, k\right)$ (Steuersystem 5)[33], verliert die Dividendenpolitik ihren Einfluss auf die Gleichgewichtsrendite:

$$\overline{r}_j = r_f \cdot (1-\Phi) + \beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - r_f \cdot (1-\Phi)\right). \tag{3.19}$$

Dabei gilt $\Psi = 0$, $\Phi = \dfrac{\left(\theta_{\hat{s}_{ek}} - \theta_{\gamma_k}\right)}{\left(1-\theta_{\gamma_k}\right)}$ mit $\theta_{\gamma_k} = \Delta \sum_{k=1}^{K} \dfrac{t_k \gamma_k}{\left(1-\gamma_k\right)^2} = \theta_{\tau_k}$ und $\Delta = \left[\sum_{k=1}^{K} \dfrac{t_k}{\left(1-\hat{s}_{ek}\right)^2}\right]^{-1}$.

In den Gleichgewichtsbeziehungen (3.16), (3.17) und (3.18) prägt der Term $\delta_j \cdot \Psi$ die Wertpapierrendite. Dieser steuerliche Einfluss der unternehmensspezifischen Dividendenrendite wird von Teilen der Literatur vernachlässigt.[34] Wie die folgenden Ausführungen unter anderem zeigen, ist dies nicht zu rechtfertigen.

3.2 Übertragung auf die Unternehmensbewertung nach Steuern

Im Folgenden wird untersucht, in welcher Hinsicht das Nachsteuer-CAPM für die Unternehmensbewertung verwendbar ist. Dabei wird auch geprüft, inwieweit sich das Vorgehen der Literatur rechtfertigen lässt. Vorausgesetzt ist Einigkeit darüber, dass Nettoüberschüsse mit Nettorenditen zu diskontieren sind.

Vor diesem Hintergrund ist zunächst festzustellen, dass die aus den Gleichgewichtsbeziehungen (3.16) bis (3.19) resultierende risikoadjustierte Alternativrendite $\overline{r}_j$ eine Rendite *vor Steuern* ist.[35] Sie besagt, dass die Akteure eine andere Risikoprämie *vor* Steuern verlangen, wenn differenzierte Besteuerung der betrachteten Einkunftsarten vorliegt, als wenn dies nicht der Fall ist. Ob diese Bruttorendite mit der Annahme differenzierter Steuern höher oder niedriger ist als die sich ohne diese Annahme aus dem Standard-CAPM ergebende Bruttorendite, ist abhängig vom komplexen Zusammenspiel der Parameter Φ und

---

[33] Die Steuersysteme 3 und 5 bilden die deutschen Verhältnisse ab, wobei System 3 einen Spezialfall von System 1 darstellt.

[34] Vgl. etwa *Drukarczyk* (1998), S. 262-263; *Drukarczyk/Richter* (1995), S. 562; *Richter* (2004), S. 29; *Richter* (2003), S. 323; *Richter* (2002), S. 335; *Richter* (1996), S. 1081; *Schüler* (1998), S. 175; *Schmidbauer* (2002), S. 1256; *Dinstuhl* (2002), S. 85; *Dinstuhl* (2003), S. 69. Dass empirische Untersuchungen aussagekräftig sind, die Eigenkapitalkosten gemäß dem Nachsteuer-CAPM auf Grundlage von Gleichgewichtsbeziehungen schätzen, die den steuerlichen Einfluss der Dividenden- auf die Wertpapierrendite vernachlässigen, muss bezweifelt werden. Vgl. mit diesem Vorgehen jüngst *Drukarczyk/Schüler* (2003), S. 338-344.

[35] Vgl. *Brennan* (1970), S. 422-423; a. *Jensen* (1972), S. 382. $\overline{r}_j$ ist definiert als $\overline{r}_j = (\pi_j + D_j - p_j^0) \cdot (p_j^0)^{-1}$.

Ψ sowie vom β–Wert und dem Verhältnis der Dividendenrenditen des betrachteten Wertpapiers und des Marktportfolios. Konstellationen, in denen differenzierte Steuern eine nach dem Standard-CAPM gegebene Bruttorendite senken, sind ebenso denkbar wie der umgekehrte Fall. Es handelt sich bei $\overline{r}_j$ gemäß (3.16), (3.17) oder (3.18) somit nicht um eine *Netto*rendite, sondern um eine um die Annahme der Existenz differenzierter Steuern adjustierte *Brutto*rendite.[36]

Mit Blick auf die Unternehmensbewertung stellt sich nun das Problem, dass Nettoüberschüsse nicht mit (gegebenenfalls adjustierten) Renditen *vor*, sondern mit solchen *nach* Steuern zu diskontieren sind. Letztere liefert das Nachsteuer-CAPM jedoch nicht. Dies zeigt sich, wenn man unterstellt, dass Zinsen, Kursgewinne und Dividenden einem für alle Anleger einheitlichen Steuersatz s unterliegen. In diesem Fall folgt aus Modell (3.16) die Bruttorendite aus dem Vorsteuer-CAPM:[37]

$$\overline{r}_j = r_f + \left(\overline{r}_M - r_f\right) \cdot \beta_j . \tag{3.20}$$

Unbestreitbar ist jedoch, dass den Investoren auch bei einheitlicher Besteuerung nicht die Vorsteuerrendite (3.20), sondern eine Nachsteuerrendite zufließen muss. Wenn das Nachsteuer-CAPM Brutto- und keine Nettorenditen erzeugt, so ist offen, wie man zu letzteren gelangen kann.

Die Literatur beschreitet hierzu teils den Weg, den aus dem Standard-CAPM (3.20) gewonnenen risikoadjustierten Bruttozinssatz um einen einheitlichen Steuersatz s zu kürzen, womit sich die erwartete Nachsteuerrendite $\overline{r}_{j,n}$ als

$$\overline{r}_{j,n} = \left[r_f + \beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - r_f\right) \right] \cdot (1 - s) \tag{3.21}$$

ergibt.[38] Dies ist jedoch nur unter engen Annahmen möglich, die gewährleisten, dass die Renditeforderung vor Steuern (3.20) nicht durch die Einführung der Besteuerung verändert

---

[36] Dies zeigt sich auch an den Überlegungen von *Brennan* (1970), S. 423-424, der mit Hilfe des Nachsteuer-CAPM Marktwerte *vor* persönlichen Steuern ermittelt.

[37] Wie sich leicht nachvollziehen lässt, hat $0 < \gamma_k = \tau_k = s_{ek} := s < 1 \; \forall \; k$ zur Folge, dass $\theta_{\gamma_k} = \theta_{\tau_k} = \theta_{\hat{s}_{ek}} := \theta_s$ und somit $\Phi = \Psi = 0$ ist. Damit ergibt sich das Vorsteuer-CAPM.

[38] Vgl. etwa *Baetge/Niemeyer/Kümmel* (2002), S. 314; *Maier* (2002), S. 75; *Kohl/Schulte* (2000), S. 1157; *Ballwieser* (1997), S. 2395; *König/Zeidler* (1996), S. 1101; *IDW* (2000), S. 834, Tz. 98 und 100.

wird, da man sonst zu dem in Abschnitt 3.1 abgeleiteten Nachsteuer-CAPM überzugehen hätte.[39] Bedingungen dafür sind:[40]

1) die bereits diskutierte Besteuerung von Zinsen, Kursgewinnen und Dividenden mit dem gleichen Satz s $\left(0 \leq \gamma_k = \tau_k = s_{ek} := s < 1 \; \forall \; k\right)$ oder
2) das Vorliegen von Steuersystem 2, wobei zusätzlich die Dividendenrenditen des Wertpapiers und des Marktportfolios dem risikolosen Zins entsprechen müssen $\left(\delta_j = \delta_M = r_f\right)$ oder
3) die Erfüllung einer sehr spezifischen linearen Beziehung zwischen der Kurs- und der Dividendenrendite sämtlicher Wertpapierportfolios, die gewährleistet, dass trotz differenzierter Steuern das Standard-CAPM resultiert.[41]

In diesen Fällen[42] stellt das Standard-CAPM (3.20) auch in einer Welt mit Steuern die korrekte Bruttorendite dar und man kann wie in (3.21) rechnen. Im Fall 2) bleibt die Vorsteuerrendite trotz differenzierter Besteuerung erhalten. Die zu erfüllende Anforderung $\left(\delta_j = \delta_M = r_f\right)$ erscheint indes äußerst restriktiv. Den Bedingungen 1) und 2) ist gemeinsam, dass sie am deutschen Steuersystem scheitern.

Für das deutsche Regime (Steuersysteme 3 und 5) konnte keine Bedingung gefunden werden, die sicherstellt, dass unter differenzierten Steuern (3.20) resultiert, und zugleich als näherungsweise erfüllt angesehen werden könnte. Folgende Beispiele mögen dies verdeutlichen:

4) Unterstellt man Steuersystem 3, so lässt sich (3.20) etwa dann aus (3.16) gewinnen, wenn $\beta_j = 1$ und $\delta_M = \delta_j$ ist und $\Phi = \theta_{\hat{s}_{ek}} = \Delta \sum_{k=1}^{K} t_k \hat{s}_{ek}$ gegen 0 läuft. Letzteres resultiert nur, wenn $\hat{s}_{ek}$ bei allen Investoren gegen 0 geht, mithin Zinsen nicht versteuert werden.

---

[39] Vgl. *Sureth/König* (2000), S. 84.

[40] Der Katalog ist nicht abschließend. Es existieren weitere realitätsferne Parameterkonstellationen, die (3.20) bei Existenz von differenzierten Steuern erzeugen.

[41] Vgl. für unterschiedliche Steuersysteme mit zwei differenzierten Steuersätzen *Long* (1977); *Chen* (1986); *König* (1990), S. 79-87; für ein Regime mit drei unterschiedlichen Sätzen vgl. *Wiese* (2003). Dies wird an dieser Stelle nicht vertieft.

[42] Für Beziehung (3.18) muss für Bedingung 1) wegen $\gamma_k = 0$ der (triviale) Spezialfall s = 0 gelten.

5) Liegt Steuersystem 5 vor, so folgt (3.20) nur dann aus (3.19), wenn Bedingung 1) erfüllt ist.

Während man in den Fällen 1) und 5) problemlos mit dem (annahmegemäß herrschenden) Einheitssteuersatz s rechnen kann, muss das s aus (3.21) in den Fällen 2) bis 4) einem Durchschnitt aus unterschiedlichen Steuersätzen entsprechen. Um diesen bestimmen zu können, bräuchte man jedoch die Wertpapierrendite nach Steuern im Gleichgewicht und müsste damit bereits das gesuchte Ergebnis kennen.

Wenn im Regelfall die engen Bedingungen 1) bis 5) nicht erfüllt sind, muss eine steueradjustierte *Vorsteuer*rendite gemäß (3.16) bis (3.19) verwendet und in eine *Nachsteuer*rendite transformiert werden. Wie letzteres gelingt, ist bislang nicht überzeugend gezeigt worden. Um dies zu belegen, wird (3.17) etwas anders dargestellt:

$$\begin{aligned} \overline{r}_j &= r_f + \beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - \Phi \cdot \delta_M - r_f \cdot \left(1 - \Phi\right)\right) + \Phi \cdot \delta_j - \Phi \cdot r_f \\ \overline{r}_j &= r_f + z_b^{adj.}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Da es sich bei $\overline{r}_j$ um eine Bruttorendite handelt, müssen auf der rechten Seite von (3.22) sämtliche Terme außer r_f einer Prämie $z_b^{adj.}$ entsprechen, die nicht nur durch das systematische Risiko, sondern auch durch die steuerliche Ungleichbehandlung der Einkunftsarten geprägt ist. Der Index b drückt aus, dass es sich bei $z_b^{adj.}$ um einen (steueradjustierten) *Brutto*zuschlag handelt. Um zu einer Nachsteuerrendite $\overline{r}_{j,n}$ zu gelangen, mit der Nettoerträge diskontiert werden dürften, wäre

$$\overline{r}_{j,n} = r_{f,n} + z_n^{adj.} \tag{3.23}$$

zu rechnen, wobei n Nettogrößen indiziert. Wie man jedoch von (3.22) zu (3.23) – insbesondere von $z_b^{adj.}$ zu $z_n^{adj.}$ – gelangen soll, ist m.W. unter den Annahmen des CAPM noch nicht analytisch gezeigt worden.

Richter/Ollmann schlagen vor, die Steuerlast auf die Dividende $\tau \cdot \delta_j$ in (3.22) von $\overline{r}_j$ abzuziehen, womit $\overline{r}_{j,n}$ resultiere.[43] Durch diese Operation wird jedoch der Bruttozuschlag $z_b^{adj.}$ nicht zum Nettozuschlag $z_n^{adj.}$. Betrachtet man (3.22), so würden *Richter/Ollmann* nicht $\tau \cdot \delta_j$, sondern den Term $\Phi \cdot \delta_j$ von $\overline{r}_j$ zu subtrahieren haben. Bei Φ handelt es sich jedoch nicht – wie bei τ – um einen Steuer*satz*, sondern um einen Steuer*korrekturfaktor*. Dies zeigt sich, wenn man Zins- und Dividendeneinkünfte steuerlich gleich behandelt, zusätzlich jedoch Kursgewinnsteuern einbezieht. Als Gleichgewichtsbeziehung resultiert dann das *Brennan*-Modell (3.22).[44] Würde man *Richter/Ollmann* folgen und $\Phi \cdot \delta_j$ auf der rechten Seite von (3.22) subtrahieren, so hätte man damit nicht nur die Steuerlast auf Dividenden subtrahiert, sondern mit dem Term Φ zusätzlich auch die in θ_{γ_k} enthaltenen Kursgewinnsteuern. Φ ist somit nicht als Dividendensteuersatz interpretierbar, sondern als Adjustierungsfaktor, der dazu dient, *Brutto*renditen aus einer Welt ohne Steuern in *Brutto*renditen in einer Welt mit Steuern zu transformieren.

Da im *Brennan*-Modell (3.22) Kursgewinnsteuern enthalten sind, müsste man konsequenterweise auch die korrespondierende Steuerlast auf die erwartete wertpapierspezifische Kursrendite $\overline{\rho}_j$ von $\overline{r}_j$ absetzen.[45] Auch wäre die Bruttorendite des Marktportfolios $\overline{r}_M$ um die Steuerlast auf Kursgewinne zu vermindern.[46] Da man schließlich den gesamten Term $\beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - \Phi \cdot \delta_M - r_f \cdot (1-\Phi)\right) + \Phi \cdot \left(\delta_j - r_f\right)$ als um Steuereinflüsse adjustierten, aber unversteuerten Bruttozuschlag $z_b^{adj.}$ auf r_f aufzufassen hat, ist r_f in (3.22) keine Nettogröße, sondern vielmehr um Steuern zu vermindern. Derartige Steuerlasten sind in den Gleichgewichten (3.16), (3.18), (3.19) oder (3.22) jedoch nicht enthalten. Man müsste sie – wie in (3.21) – nachträglich in das Gleichgewicht einfügen. Wie dies zu geschehen hat, ist aus der analytischen Ableitung des Nachsteuer-CAPM nicht zu erklären.

Eine analytisch begründete Ermittlung von $\overline{r}_{j,n}$ würde mithin einen Modellrahmen – ein „Netto-CAPM“ – voraussetzen, der von vornherein auf die Gewinnung von

---

43 Vgl. *Ollmann/Richter* (1999), S. 17. Die Autoren vernachlässigen Kursgewinnsteuern und belasten Zinseinkünfte und Dividenden mit einem für alle Anleger einheitlichen Satz τ.

44 Vgl. a. Abschnitt 3.1, Gleichung (3.17).

45 Schließlich ist $\overline{r}_j$ definiert als $\overline{r}_j = \overline{\rho}_j + \delta_j$.

46 Investiert ein Akteur – entsprechend dem CAPM – sein Budget in die risikolose Anlage sowie in das Marktportfolio, so hat er Einkünfte aus letzterem zu versteuern.

Eigenkapitalkosten nach Steuern zielt und nicht – wie das „Nachsteuer-CAPM“ – auf steueradjustierte Bruttorenditen. Verwendet man letztere zum Diskontieren von *Netto*erträgen, so werden diese mit einer *Vorsteuer*rendite abgezinst. Versucht man, diese Vorsteuerrendite in eine solche nach Steuern zu transformieren, so handelt man sich Parameter ein, die im Gleichgewicht nicht auftreten, mithin aus dem *Brennan*-Kalkül heraus nicht begründbar sind. Theoretisch begründbare Nachsteuerrenditen $\overline{r}_{j,n}$ erhält man aus (3.21), wobei obige enge Bedingungen erfüllt sein müssen. Im Kontext differenzierter Steuern steht man dann jedoch vor dem Problem, den Mischsteuersatz s nicht bestimmen zu können, ohne die korrekte Nettorendite zu kennen.

Die Literatur geht daher einen anderen Weg und versucht, differenzierte Steuern im CAPM anzusetzen, um auf diese Weise Nettorenditen zu erzeugen. Dies geschieht in der Form, dass das Standard-CAPM gleichsam „nachträglich“ um (u.U. marktdurchschnittliche) differenzierte Steuersätze ergänzt wird[47], wobei teils $\overline{r}_M$ und $\overline{r}_j$ in eine Dividenden- und eine Kursrendite aufgespalten werden. Bei diesem Vorgehen wird häufig Bezug auf die Gedanken *Brennan*s, mithin auf die hier abgeleiteten Gleichgewichtsbeziehungen, genommen. Dabei werden die Anpassungsterme Φ und Ψ, die der Gewinnung einer steueradjustierten *Brutto*rendite dienen, unzulässigerweise mit Steuer*sätzen* gleichgesetzt, was zu einer Nettorendite führen soll. Betrachtet man (3.16) und interpretiert die Steuersätze $\tau, \hat{s}_e$ und γ als Durchschnittssteuersätze der Investoren, so ergäbe sich nach diesem Vorgehen im System mit drei differenzierten Steuersätzen:[48]

$$\overline{r}_j = r_f \cdot (1-\hat{s}_e) + \beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - \delta_M \cdot \tau - r_f \cdot (1-\hat{s}_e)\right) + \tau \cdot \delta_j \,. \tag{3.24}$$

Dass die Anpassungsparameter Φ und Ψ nicht als Steuersätze interpretiert werden dürfen, zeigt sich am Term $r_f \cdot (1-\Phi)$ aus (3.16), der hier durch $r_f \cdot (1-\hat{s}_e)$ ersetzt wurde. Während $\hat{s}_e > 0$ ein Steuersatz ist, der den Bruttozins jedenfalls senkt, ist $\Phi = \frac{\left(\theta_{\hat{s}_{ek}} - \theta_{\gamma_k}\right)}{\left(1-\theta_{\gamma_k}\right)}$ ein

[47] Vgl. *Schmidbauer* (2002), S. 1256; *Taggart* (1991), S. 12-13. Vernachlässigt wird dabei die Tatsache, dass die Investoren bei Vorliegen differenzierter Steuern ihr Verhalten ändern und eine andere Bruttorendite verlangen als bei Ausblendung von Steuern.

[48] Vgl. mit analogem Vorgehen *Drukarczyk/Richter* (1995), S. 562; *Drukarczyk* (1998), S. 262-263; *Richter* (1996), S. 1081; *Richter* (2002), S. 335; *Richter* (2003), S. 323; *Richter* (2004), S. 29; *Schüler* (1998), S. 175; *Ollmann/Richter* (1999), S. 167; *Drukarczyk/Schüler* (2003), S. 339; *Schwetzler/Piehler* (2004), S. 14; *Breid* (1994), S. 191; *Dinstuhl* (2003), S. 69; *Dinstuhl* (2002), S. 84; *Löffler* (1998), S. 422; *Kruschwitz* (2002), S. 195-196. Diese Autoren vernachlässigen Kursgewinnsteuern.

Korrekturfaktor[49] zur Umwandlung des (Brutto-)Standard-CAPM in ein Brutto-CAPM unter dem Einfluss differenzierter Steuern. Das Vorzeichen von Φ kann – abhängig vom Verhältnis der in den Parameter einfließenden Steuersätze $\hat{s}_e$ und γ – auch negativ sein, so dass sich nach Steuern ein *höherer* Zinssatz ergäbe. Dies erklärt sich daraus, dass der gesamte Term $r_f \cdot (1-\Phi)$ noch immer ein *Brutto*zinssatz ist, der mit dem *Netto*zins $r_f \cdot (1-\hat{s}_e)$ wenig gemeinsam hat.

Bei (3.24) handelt es sich somit nicht um ein analytisch ableitbares CAPM, das Nettorenditen erzeugt, sondern um ein pragmatisch um Steuersätze angereichertes Standard-CAPM. Nun wurde oben aber gezeigt, dass das Standard-CAPM im Umfeld differenzierter Besteuerung im Allgemeinen nicht die richtige Bruttorendite liefert und somit nicht in der beschriebenen Form um differenzierte Steuern ergänzt werden darf. Ein theoretisch fundiertes Vorgehen setzte vielmehr voraus, dass die Bruttogleichungen (3.16), (3.17), (3.18) oder (3.19) verwendet und um Steuern vermindert werden. Dies gelingt nicht, indem man Φ und Ψ durch Steuersätze ersetzt.

Auch der denkbare Ausweg, die Gleichgewichtsrendite des Nachsteuer-CAPM mit einem für alle Anleger und Einkunftsquellen einheitlichen Steuersatz s zu belegen, führt theoretisch nicht weiter: Legt man etwa (3.22) zugrunde, so wäre

$$\begin{aligned} \bar{r}_j \cdot (1-s) &= \left(r_f + \left(\bar{r}_M - r_f - \Phi \cdot (\delta_M - r_f)\right) \cdot \beta_j + \Phi \cdot \delta_j - \Phi \cdot r_f\right) \cdot (1-s) \\ \bar{r}_j \cdot (1-s) &= \left(r_f + z_b^{adj.}\right) \cdot (1-s) \end{aligned} \tag{3.25}$$

zu rechnen. Die Unbekannte in (3.25) ist s. Läge tatsächlich ein Steuersystem vor, in dem sämtliche Einkunftsarten mit s besteuert würden, so müsste man nicht auf das Nachsteuer-CAPM zurückgreifen, sondern hätte direkt gemäß (3.21) zu verfahren.[50] Im Kontext differenzierter Steuern entspricht die Größe einem mit den Anteilen der Renditen der unterschiedlichen Einkunftsarten an der Gesamtrendite gewogenen Durchschnitt der differenzierten Sätze. Um ihn gewinnen zu können, müsste man die mit den einzelnen Einkunftsarten verbundenen Steuerlasten kennen und mitteln. Hierzu sind Steuern jedoch differenziert anzusetzen.

[49] Vgl. zur Definition von Φ Abschnitt 3.1, Gleichung (3.14).
[50] In diesem (realitätsfernen) Fall gibt es kein Ermittlungsproblem für s.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass man Nettoüberschüsse nicht mit den Diskontierungssätzen (3.16) bis (3.19) des Nachsteuer-CAPM abzinsen darf, da letztere Bruttosätze sind. Wie diese im Kontext differenzierter Steuern in Nettorenditen umzuwandeln sind, ist bislang offen. Bestehende Ansätze in der Literatur überzeugen nicht. Theoretisch begründbare Nettoalternativrenditen erhält man durch (3.21) nur unter äußerst restriktiven Bedingungen. Wird in Anwesenheit differenzierter Steuern ein Vorgehen wie in (3.21) oder (3.25) gewählt, so kann der durchschnittliche Steuersatz s ohne Kenntnis der gesuchten gleichgewichtigen Nettorendite nicht gewonnen werden. Verwendet man dagegen (3.24) (oder ähnliche Beziehungen) zur Diskontierung der Nettozahlungen, so befindet man sich nicht auf dem Boden der Theorie.

3.3 Datenbeschaffungsprobleme

Die in das Nachsteuer-CAPM einfließenden Parameter $\theta_{\hat{s}_{ek}}, \theta_{\tau_k}$, und θ_{γ_k} stellen komplexe Durchschnitte der Investorensteuersätze dar. Dass sie die durch t_k ausgedrückten Risikoeinstellungen der Akteure enthalten, wird von der Literatur häufig vernachlässigt.[51] Ohne die Ausprägungen der investorenspezifischen Risikotoleranzen zu kennen, ist die konkrete Höhe der im Modell anzusetzenden Steueradjustierungsfaktoren $\theta_{\hat{s}_{ek}}, \theta_{\tau_k}$, und θ_{γ_k} jedoch nicht bestimmbar. In diesem Fall lässt sich die korrekte, in einer Welt mit differenzierten Steuersätzen anzusetzende, Bruttorendite nicht gewinnen. Für die Umsetzung des Nachsteuer-CAPM ist es somit nicht hinreichend, Annahmen über die marktdurchschnittlichen Steuersätze zu treffen. Letztere sind vielmehr simultan mit den Risikoeinstellungen zu schätzen.

Unterstellt man, dass die individuellen Risikoeinstellungen der Marktteilnehmer nicht ermittelbar sind, kann man nach Spezialfällen suchen, in denen sich die Variable t_k aus dem Kalkül entfernen lässt.[52] So kann man unterstellten, dass unterschiedliche Einkunftsarten zwar differenziert besteuert werden, die Steuersätze aller Marktteilnehmer jedoch identisch sind $\left(\gamma_k = \gamma \neq \hat{s}_{ek} = \hat{s}_e \neq \tau_k = \tau \;\forall\, k\right)$. Es lässt sich leicht zeigen, dass dann für (3.16) $\Phi = \left(\hat{s}_e - \gamma\right) \cdot \left(1 - \gamma\right)^{-1}$ und $\Psi = \left(\tau - \gamma\right) \cdot \left(1 - \gamma\right)^{-1}$ folgt. Φ und Ψ sind mithin von t_k

---

[51] Vgl. Fn. 34 und 48. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass die dort genannten Autoren die *Brennan*schen Steuer*adjustierungsfaktoren* unzulässigerweise durch Steuer*sätze* ersetzen.

[52] Von solchen Spezialfällen müssen die in Fn. 34 und 48 genannten Vertreter pragmatischer Varianten des Nachsteuer-CAPM zumindest implizit ausgehen.

unabhängig. Im Fall ohne Kursgewinnsteuern ergibt sich $\Phi = \hat{s}_e$ und $\Psi = \tau$.[53] Will oder muss man für die Umsetzung des Modells pragmatisch vorgehen, so kann man erstens marktdurchschnittliche Steuersätze γ, $\hat{s}_e$ und τ ermitteln und zweitens annehmen, dass diese für alle Investoren einheitlich sind. Letztere Prämisse ist angesichts der im deutschen Steuersystem vorliegenden progressiven Steuersätze allerdings nicht realistisch. Zudem impliziert sie einen logischen Bruch: Die Annahme einheitlicher Steuersätze ist Voraussetzung dafür, dass sich t_k aus dem Kalkül kürzen lässt. Die Notwendigkeit zur Durchschnittsbildung setzt jedoch voraus, dass die Sätze unterschiedlich sind und t_k damit nicht vernachlässigt werden darf. Ein Ausweg aus diesem Problem könnte darin liegen, zunächst die aggregierten Risikoeinstellungen am Markt zu schätzen und diese zur Berechnung der Parameter $\theta_{\hat{s}_{ek}}, \theta_{\tau_k}$, und θ_{γ_k} zu verwenden. Entsprechende Untersuchungen liegen vor.[54] Zu leisten wäre dann eine Verknüpfung der empirisch gewonnenen Steuersätze und Risikoeinstellungen. Betont sei, dass auch dies nur zu einer pragmatischen Nährungslösung führen kann, die theoretisch nicht zu rechtfertigen ist.[55]

Abseits davon ergibt sich das Problem, dass der Bewerter bei der Schätzung der Steuersätze sämtlicher im Markt aktiven Entscheider Progressionseffekte zu berücksichtigen hat.[56] Liegen letztere vor, so ist die Einkommensteuer nicht mehr im Partialmodell, bestehend aus Unternehmen und Alternativanlage, bestimmbar. Relevant werden die sonstigen, der Einkommensteuer unterliegenden Einkünfte der Akteure.[57] Da das CAPM theoretisch weltweit formuliert ist, wären überdies ausländische Steuersysteme und etwaige Doppelbesteuerungsabkommen zu berücksichtigen.[58] Insoweit stellt die von *Brennan* oder hier vorgenommene Betrachtung einzelner nationaler Steuersystem bereits eine unzulässige Verengung des CAPM dar.

---

[53] Auch wenn sich die Substitute Φ und Ψ in diesem Fall zu Steuersätzen reduzieren, erfüllen sie die Funktion von Steueradjustierungsfaktoren. Ihr Ansatz darf nicht zu dem Fehlschluss verleiten, dass sie zu Nettorenditen führen. Vgl. dazu Kapitel 3.2.

[54] Vgl. *Friend/Blume* (1975); im Überblick über weitere Studien *Löffler* (2001), S. 78-79.

[55] Man beachte, dass t_k und die Steuersätze multiplikativ verknüpft sind und daher *je Investor* simultan zu schätzen wären.

[56] Die Annahme progressiver Steuersätze wurde hier vereinfachend nicht getroffen, lässt sich aber formal problemlos in das CAPM integrieren. Vgl. *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 167-173; *König* (1990), S. 68 und S. 94-109.

[57] Vgl. *Gratz* (1981), S. 983; *Schreiber* (1987), S. 75; *Ballwieser* (1995), S. 32.

[58] Vgl. *Hachmeister* (2000), S. 131.

Weiterhin ist unklar, welche Größen am Markt tatsächlich beobachtbar sind.[59] Handelt es sich bei den erhebbaren Bruttorenditen bereits um *steueradjustierte* Größen oder stammen sie aus einer fiktiven Welt, in der es keine Steuern gibt? Letztere bräuchte man, wenn man das in Abschnitt 3.1 diskutierte Nachsteuer-CAPM verwenden möchte. Wären dagegen sämtliche zur Bestimmung der Bruttorenditen notwendigen Größen bereits um Steuereinflüsse angepasst, so wäre die Bruttorendite gemäß (3.16) oder (3.18) jene, die am Markt beobachtbar ist. Es läge dann nahe, diese um die Steuerlasten auf Zinsen, Dividenden und Kursgewinne zu vermindern, um auf eine Nachsteuerrendite zu gelangen. Probleme entstehen jedoch, wenn die Anpassung des Marktes an die Besteuerung nur unvollständig erfolgt. Diese zu lösen, ist nicht Anliegen dieses Beitrags.

3.4 Empirische Tests des Nachsteuer-CAPM

Weiterhin ist zu untersuchen, ob das Nachsteuer-CAPM die Realität gut beschreibt. Studien zu seiner Überprüfung müssen die Linearität des Zusammenhangs zwischen der erwarteten Wertpapierrendite und dem systematischen Risiko sowie der Dividendenrendite testen. Die Ergebnisse sind uneinheitlich.

Litzenberger/Ramaswamy ermitteln eine hochgradig signifikante lineare Beziehung auf Basis kurzfristiger (monatlicher) Dividendenrenditen.[60] *Miller/Scholes* halten dem entgegen, dass derartige Tests sensibel auf die Definition der Dividendenrendite reagieren. Verwende man kurzfristige Dividendenrenditen, so würden die Ergebnisse durch Ankündigungseffekte verzerrt. Eliminiere man diese und verwende langfristige Dividendenrenditen, so gelange man zu keinem signifikanten linearen Zusammenhang.[61] Kritisch zur Rolle derartiger Informationseffekte äußert sich *Hess*, der feststellt, dass sie keinen signifikanten Einfluss auf die Beziehung zwischen der Dividenden- und der Gleichgewichtsrendite ausüben.[62] *Rosenberg/Marathe* und *Ang/Peterson* greifen im Gegensatz zu den vorgenannten Autoren auf *ex ante*-Schätzungen zurück und finden auf Grundlage langfristiger Dividendenrenditen einen signifikanten linearen Zusammenhang zwischen $\overline{r}_j$, δ_j und β_j.[63] *Keim* stellt einen

---

[59] Hierauf verweist *Richter* (2003), S. 326.
[60] Vgl. *Litzenberger/Ramaswamy* (1979), S. 183-184, im Zeitraum zwischen 1936 und 1977.
[61] Vgl. *Miller/Scholes* (1982), S. 1123-1131; *Miller* (1986), S. 460; a. *Kalay/Michaely* (2000).
[62] Vgl. *Hess* (1982), S. 450-455.
[63] Vgl. *Rosenberg/Marathe* (1979), S. 202-204, im Zeitraum von 1931 bis 1966; *Ang/Peterson* (1985), S. 541-544, zwischen 1973 und 1983, jedoch bei einem Signifikanzniveau von 10 %.

„Januar-Effekt“ fest, der nicht durch das Nachsteuer-CAPM erklärt wird.[64] Zu uneindeutigen Ergebnissen gelangt *Morgan*, der abschließend die Existenz eines linearen Zusammenhangs negiert.[65] Während diese Studien auf den US-amerikanischen Kapitalmarkt bezogen sind, kommt *König* in seiner Untersuchung am deutschen Kapitalmarkt zu dem Schluss, dass das Nachsteuer-CAPM nur einen geringen Erklärungsgehalt besitzt.[66]

4. Bewertungsgleichungen und Bedingungen für die Irrelevanz der Besteuerung

Vor dem Hintergrund der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 können auf Grundlage der CAPM-Gleichungen (3.16) bis (3.19) keine Bewertungsformeln angegeben werden. Unter den oben erarbeiteten engen Bedingungen, unter denen das Standard-CAPM (3.20) im Kontext differenzierter Steuern den korrekten Bruttozuschlag liefert und man damit wie in (3.21) rechnen kann, könnte man den Unternehmenswert U_0 einer Personengesellschaft allenfalls als

$$U_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1 - \hat{s}_e\right)\right)}{\left(1 + \left[r_f + \beta_j \cdot \left(\overline{r}_M - r_f\right)\right] \cdot \left(1 - s\right)\right)^t} \tag{3.26}$$

berechnen. Im Fall der Kapitalgesellschaft wäre im Zähler von (3.26) $E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1 - \tau\right)\right)$ anzusetzen, wenn man unterstellt, dass die Überschüsse allein aus Dividenden bestehen.

Darf man im Regelfall nicht wie in (3.21) verfahren und muss auf Bruttorenditen entsprechend dem Nachsteuer-CAPM zurückgreifen, so ergeben sich bei der Formulierung von Bewertungsgleichungen grundsätzliche methodische Probleme, die zu den in Abschnitt 3.2 diskutierten hinzutreten. Wie das Standard-CAPM ist auch das Nachsteuer-CAPM ein Einperiodenmodell. Bei der Übertragung auf den Mehrperiodenkontext ist zu beachten, dass die Dividendenrendite im Nachsteuer-CAPM als deterministisch angenommen wird[67] und bei wiederholter Anwendung von (3.16) bis (3.19) als konstant anzusehen ist. Diese Prämisse ist mit stochastischen, intertemporal schwankenden Dividenden $\tilde{D}_t$ als Überschussgrößen der

64 Vgl. *Keim* (1985), S. 479-487. Zwischen 1931 und 1978 waren die mit der Dividendenrendite verknüpften Regressionskoeffizienten im Januar signifikant größer als in den übrigen Monaten.

65 Vgl. *Morgan* (1982), S. 1083-1085, im Untersuchungszeitraum von 1936 bis 1977.

66 Vgl. *König* (1990), S. 142-173. Der Untersuchungszeitraum erstreckt sich von 1959 bis 1986. *König* verwendet monatliche Daten. Hinweise auf einen „Januar-Effekt“ findet er nicht.

67 Vgl. Fn. 15. Modelle mit stochastischen Dividendenrenditen liegen nicht vor. Insoweit kann es sich bei den Darstellungen mit unsicheren Dividendenrenditen bei *Richter* (2003), S. 323, und *Schwetzler/Piehler* (2004), S. 14, nur um eine ad hoc-Annahme handeln. Ein Nachsteuer-CAPM mit stochastischen Dividendenrenditen würde vermutlich eine Reihe weiterer Kovarianzterme enthalten und damit den in Abschnitt 3.1 abgeleiteten Beziehungen nicht gleichen.

Kapitalgesellschaft kaum vereinbar. Um konstante δ_j im Zeitlauf aufrechtzuerhalten, müsste $E\left(\tilde{D}_t\right)\cdot\left(p_j^{t-1}\right)^{-1}=\delta_j\ \forall\ t$ gelten, also das Verhältnis der Ausschüttungen zum Wertpapierpreis am Periodenbeginn intertemporal konstant sein. Damit impliziert die Modellmechanik des Nachsteuer-CAPM Dividendenverteilungen, die nicht mit der Unternehmensplanung übereinstimmen müssen.

Werden ferner Kursgewinnsteuern im Modell erfasst, so führt dies beim wiederholten Ansatz des Nachsteuer-CAPM dazu, dass Kurssteigerungen periodisch, mithin zeitlich kongruent mit den zu versteuernden Unternehmenserträgen, zu vereinnahmen sind. Modelltheoretische Überlegungen legen ein anderes Realisationsverhalten der Investoren nahe.[68] Dieses Realisationsverhalten realitätsnah im Modell abzubilden, erscheint daher wünschenswert. Entsprechende Versuche sind vorhanden[69], können aber nicht überzeugen, weil hierzu auf Mehrperiodenversionen des Nachsteuer-CAPM mit differenzierten Steuern überzugehen wäre, die bislang nicht existieren.[70] Ebenso sind Bedingungen für die wiederholte Verwendung des Nachsteuer-CAPM noch nicht formuliert worden.[71]

Mit Blick auf die Irrelevanz der Besteuerung kann im Kontext des CAPM erstens untersucht werden, inwieweit sich trotz der Existenz differenzierter persönlicher Steuern das Standard-CAPM als korrekte Bruttorendite ergibt. Derartige Bedingungen wurden in Abschnitt 3.2 erarbeitet und stellten sich als äußerst restriktiv heraus. Zweitens kann nach Konstellationen gesucht werden, in denen Steuern unternehmenswertneutral sind.

Will man Wertneutralität erzeugen, so kommt nur das Rentenmodell in Betracht. Im einfachsten Fall herrschen die Bedingungen, unter denen man wie in (3.21) verfahren darf. Irrelevanz der (u.U. differenzierten) Besteuerung ist dann gegeben, wenn der Steuersatz s dem Steuersatz auf die Überschussgröße entspricht.[72] Weitere Bedingungen für die Wertirrelevanz

[68] Vgl. *Constantinides* (1983), S. 616-617; *Dammon/Dunn/Spatt* (1989), S. 347-370.

[69] *Richter* (2004), S. 24, führt für Perioden, in welchen Kursgewinne realisiert (nicht realisiert) werden, eine zeitabhängige Binärvariable ein, mit deren Hilfe er die damit verbundene Steuerlast erfasst (vernachlässigt).

[70] Auf diesen Mangel verweisen auch *Niemann/Sureth* (2002), S. 21.

[71] Diese sind bereits für das Vorsteuer-CAPM äußerst restriktiv und implizieren eine Verteilung der Cashflows, die nicht mit der prognostizierten übereinstimmen muss. Vgl. *Fama* (1977), S. 7-17; *Fama* (1996), S. 416-426; a. *Hachmeister* (1998), S. 25-27. Mit Blick auf die Ergebnisse von *Fama* (1977) ist zu vermuten, dass sich für die wiederholte Verwendung des Nachsteuer-CAPM zusätzlich mindestens die Steuersätze der Investoren intertemporal nicht verändern dürfen oder zumindest deterministisch entwickeln müssen.

[72] Dies gilt nicht, wenn man wie in (3.25) verfährt. Zwar kürzen sich die Steuersätze, die Bruttorendite wird jedoch gegenüber dem Standard-CAPM durch die Existenz von Steuern gemäß dem Nachsteuer-CAPM verändert.

der Besteuerung können erst angegeben werden, wenn gezeigt wurde, wie die Bruttorenditen des Nachsteuer-CAPM geeignet in Nettorenditen umzurechnen sind.

In der Literatur vorhandene Irrelevanzbedingungen zielen zwar auf die Wertneutralität der Besteuerung, sind aber vor dem Hintergrund der Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 als Bedingungen für die Steuerirrelevanz im ersteren Sinne anzusehen. So resultiert *Richter* zufolge im Steuersystem 2 Wertneutralität, wenn $\beta_j = 1$ und $\overline{\rho}_M = g$ ist.[73] Dabei wird das (hier als ungeeignet gekennzeichnete) Vorgehen gewählt, den Steueradjustierungsfaktor Φ mit dem Dividenden- und Zinssteuersatz gleichzusetzen und $\Phi \cdot \delta_j$ von der Bruttogleichgewichtsrendite abzusetzen, um eine Nachsteuerrendite zu erhalten. Nach dieser Vorgehensweise bleibt ein Diskontierungssatz $\delta_M \cdot (1-\Phi)$ übrig, der sich im Wachstumsmodell kürzen lassen soll.[74] Damit ist aber nur eine Bedingung formuliert, unter der die Steuern auf die Zählergröße mit jenen aus dem Nachsteuer-CAPM gekürzt werden können.[75] Da letzteres eine (noch um Steuern zu vermindernde) Bruttorendite liefert, wird damit keine Wertirrelevanz der Besteuerung erzeugt.[76]

Anstatt das CAPM zu verwenden, kann der Risikozuschlag unter Rückgriff auf Sicherheitsäquivalente $S\left[\tilde{C}\right]$ gewonnen werden, die sich nach Maßgabe der *Bernoulli*-Theorie aus der Bandbreite der Überschussverteilung $\tilde{C}$ ergeben.[77] Bezeichnet $E\left[\tilde{C}\right]$ den Erwartungswert der Bruttoüberschüsse, so muss für den Unternehmenswert einer Personengesellschaft im Falle stochastisch unabhängiger Verteilungen die Identität

$$U_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot (1-\hat{s}_e)\right)}{\left(1+r_f \cdot (1-\hat{s}_e)\right)^{t-1}\left(1+r_f \cdot (1-\hat{s}_e)+z_{n,t}\right)} = \sum_{t=1}^{T} \frac{S\left(\tilde{C}_t \cdot (1-\hat{s}_e)\right)}{\left(1+r_f \cdot (1-\hat{s}_e)\right)^{t}} \qquad (3.27)$$

erfüllt sein. Um den Risikozuschlag nach Steuern $z_{n,t}$ eindeutig bestimmen zu können, kann

---

[73] Vgl. *Richter* (1999), S. 65; *Richter* (2002), S. 336-337; *Richter* (2004), S. 31. *Richter* geht von der Steuerfreiheit von Kursgewinnen aus. g entspricht der dort unterstellten sicheren Wachstumsrate der Erträge aus dem *Gordon/Shapiro*-Modell. Vgl. zu letzterem *Gordon/Shapiro* (1956), S. 105-106.

[74] Vgl. *Richter* (1999), S. 65.

[75] Diese Bedingung resultiert jedoch nur, wenn Steuer*adjustierungsfaktoren* (unzulässigerweise) mit Steuer*sätzen* gleichgesetzt werden.

[76] Gleiches gilt, wenn unter den genannten Voraussetzungen g = 0 und $\beta_j = 1$ ist. Vgl. hierzu *Ollmann/Richter* (1999), S. 172.

[77] Vgl. *Ballwieser* (1981), S. 101-102.

$$\frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)}{\left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)^{t-1} \cdot \left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)+z_{n,t}\right)} = \frac{SÄ\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)}{\left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)^t} \quad \forall\, t \tag{3.28}$$

gefordert werden, was zu

$$z_{n,t} = \left[\frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)}{SÄ\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right)} - 1\right] \cdot \left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right) \tag{3.29}$$

führt.[78] Betrachtet man eine Kapitalgesellschaft, so ist im Zähler von (3.27) und (3.28) der Term $\left(1-\hat{s}_e\right)$ durch $\left(1-\tau\right)$ zu ersetzen. Die zu (3.28) analoge Anforderung liefert den Risikozuschlag[79]

$$z_{n,t} = \left[\frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\tau\right)\right)}{SÄ\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\tau\right)\right)} - 1\right] \cdot \left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right). \tag{3.30}$$

Um Steuern auf Dividenden- und Zinseinkünfte differenziert zu erfassen, muss man mithin nicht auf das CAPM zurückgreifen.[80] Liegt die relevante Alternativanlage im konkreten Fall im landesüblichen Zinssatz, so erlaubt (3.30) die Berücksichtigung unterschiedlicher Steuern auf Dividenden- und Zinseinkünfte.

Bedingungen für die Wertneutralität der Steuern im Rahmen dieses Ansatzes lassen sich erneut nur im Rentenmodell finden. Im Fall der Personengesellschaft kürzt sich der Term $\left(1-\hat{s}_e\right)$ allein dann, wenn der Entscheider eine Risikonutzenfunktion mit konstanter relativer Risikoaversionsfunktion aufweist.[81] Im Fall der Kapitalgesellschaft sind Steuern auch unter dieser Annahme nicht wertneutral, da Bewertungsobjekt und Alternativanlage mit unterschiedlichen Steuern belegt sind.

---

78 Vgl. *Ballwieser* (1997), S. 2395; a. *Günther* (1998), S. 1837.

79 Vgl. mit gleichem Ergebnis *Schmidbauer* (2002), S. 1255. Allerdings gewinnt *Schmidbauer* Gleichung (3.30) nicht mit Hilfe von (3.28), sondern mit einer anderen Zusatzbedingung für die Identität der periodischen diskontierten Sicherheitsäquivalente und Erwartungswerte, die nicht zu (3.30) führt. Unterstellt man seine Zusatzbedingung, so lautete der korrekte Zuschlag:

$$z_{n,t} = \left[\left(\frac{E\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\tau\right)\right)}{SÄ\left(\tilde{C}_t \cdot \left(1-\tau\right)\right)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1\right] \cdot \left(1+r_f \cdot \left(1-\hat{s}_e\right)\right).$$

80 Diesen Eindruck vermittelt *Richter* (2004), S. 20.

81 Vgl. *Leuthier* (1988), S. 168-174.

5. Thesenförmige Zusammenfassung

(1) In jüngerer Zeit verwendet die Literatur vermehrt das auf *Brennan* zurückgehende Nachsteuer-CAPM, um Unternehmenswerte nach persönlichen Steuern zu bestimmen. Hierfür spricht, dass das Modell analytisch gewonnen wurde und differenzierte Steuern erfasst. Letzteres ist seit Einführung des Halbeinkünfteverfahrens wünschenswert. Diese Eigenschaften sagen per se indes noch nichts darüber aus, inwieweit das Nachsteuer-CAPM für Zwecke der Unternehmensbewertung verwendbar ist.

(2) Die Struktur des von *Brennan* und anderen für zwei differenzierte Steuersätze entwickelten Nachsteuer-CAPM bleibt grundsätzlich auch dann erhalten, wenn es wie hier mit drei unterschiedlichen Sätzen abgeleitet wird. Es zeigt im Gleichgewicht eine lineare Beziehung zwischen der Vorsteuerrendite des Wertpapiers und dem systematischen Risiko sowie der Dividendenrendite des betrachten Titels.

(3) Nettocashflows sind mit Nettorenditen abzuzinsen. Letztere erzeugt das Nachsteuer-CAPM jedoch nicht. Ergebnis des Modells ist eine Bruttorendite, die zum Ausdruck bringt, dass die Investoren bei der Existenz differenzierter Steuern eine höhere oder niedrigere Risikoprämie vor Steuern verlangen als bei Ausblendung gespaltener Steuersätze. Das Nachsteuer-CAPM liefert die im Umfeld differenzierter Steuern theoretisch korrekte Bruttorendite. Wie diese in eine Nettorendite zu transformieren ist, wurde bislang nicht überzeugend gezeigt.

(4) Das Vorgehen von Teilen der Literatur, die Bruttorendite des Standard-CAPM mit einem einheitlichen Steuersatz zu belasten, ist nur unter Bedingungen möglich, die sicherstellen, dass sich das Nachsteuer- zum Standard-CAPM reduziert. Diese Bedingungen sind äußerst restriktiv und scheitern teils am zugrundezulegenden Steuersystem. Zudem muss der unterstellte einheitliche Steuersatz bei Vorliegen differenzierter Steuern ein *Misch*satz sein, dessen Höhe man erst bestimmen kann, wenn die gesuchte Nettorendite bereits ermittelt wurde. Gleiches gilt, wenn die Bruttorendite des Nachsteuer-CAPM mit einem einheitlichen Steuersatz belastet wird.

(5) Andere Vorschläge, die darauf zielen, das Standard-CAPM um differenzierte Steuersätze zu ergänzen, vernachlässigen die Tatsache, dass im Umfeld differenzierter Steuern nicht dieses Modell, sondern das Nachsteuer-CAPM die korrekte Bruttorendite bestimmt. Auch das Vorgehen, die steuerlichen Parameter in der Gleichgewichtsbeziehung des Nachsteuer-CAPM als Steuersätze zu interpretieren, um

hierdurch eine Nettorendite zu erhalten, ist theoretisch nicht gedeckt. Bei diesen Parametern handelt es sich nicht um Steuersätze mit positivem Vorzeichen, sondern um Steueradjustierungsfaktoren, die u.U. ein negatives Vorzeichen aufweisen können.

(6) Die Umsetzung des Nachsteuer-CAPM in Reinform scheitert an prohibitivem Datenbeschaffungsaufwand. Dieser resultiert daraus, dass die Grenzsteuersätze sämtlicher Marktakteure simultan mit deren Risikoeinstellungen zu bestimmen wären. Letztere sind in den Steueradjustierungsfaktoren enthalten. Pragmatische Auswege hieraus gehen mit harten Annahmen etwa über das Steuersystem einher. Daneben ist das CAPM weltweit formuliert. Vorhandene Nachsteuerversionen sind bislang jedoch nur für nationale Steuersysteme formuliert worden.

(7) Empirische Untersuchungen zum Nachsteuer-CAPM geben ein uneinheitliches Bild ab, abhängig davon, ob die Dividendenrendite kurz- oder langfristig definiert wird. Die Studie von *König* gibt keinen Hinweis darauf, dass das Modell unter deutschen Verhältnissen eine gute Beschreibung der Realität darstellt.

(8) Bei der Formulierung von Bewertungsgleichungen auf Grundlage des Nachsteuer-CAPM stellt sich das Problem, dass das Modell einperiodig formuliert ist und Mehrperiodenversionen nicht erarbeitet wurden. Zudem wird die Dividendenrendite in sämtlichen analytisch gewonnenen Gleichgewichtsbeziehungen als deterministisch angenommen. Diese Annahme ist mit intertemporal schwankenden, stochastischen Dividenden im Zähler des Bewertungskalküls kaum zu vereinbaren.

(9) Wertirrelevanz der Besteuerung lässt sich im Kontext des Nachsteuer-CAPM dann herstellen, wenn die korrekte Bruttorendite in realitätsfernen Konstellationen durch das Standard-CAPM gegeben ist und damit um einen einheitlichen (Misch-)Steuersatz gekürzt werden kann. Entspricht dieser Steuersatz jenem der Zählergröße, so beeinflussen Steuern den Unternehmenswert im Rentenmodell nicht. Dies entspricht grundsätzlich den bekannten Ergebnissen, die erfüllt sein müssen, wenn man Risikozuschläge mit Hilfe von Sicherheitsäquivalenten der Ertragsbandbreiten gewinnt. Die Irrelevanzbedingungen sind eng und scheitern bereits am Halbeinkünfteverfahren.

Literaturverzeichnis

Ang, James S./Peterson, David R. (1985): Return, Risk, and Yield: Evidence from Ex Ante Data, in: JF, Vol. 40 (1985), S. 537-548.

Arrow, Kenneth J. (1971): The Theory of Risk Aversion, in: *Arrow, Kenneth J.* (Hrsg.): Essays in the Theory of Risk-Bearing, Amsterdam/London 1971, S. 90-120.

Auerbach, Alan J./King, Mervyn A. (1983): Taxation, Portfolio Choice, and Debt-Equity Ratios: A General Equilibrium Model, in: QJE, Vol. 98 (1983), S. 587-610.

Baetge, Jörg/Niemeyer, Kai/Kümmel, Jens (2002): Darstellung der Discounted-Cashflow-Verfahren (DCF-Verfahren) mit Beispiel, in: *Peemöller, Volker H.* (Hrsg.): Praxishandbuch der Unternehmensbewertung, 2., aktualisierte und erweiterte Aufl., Herne/Berlin 2002, S. 263-360.

Ballwieser, Wolfgang (1981): Die Wahl des Kalkulationszinsfußes bei der Unternehmensbewertung unter Berücksichtigung von Risiko und Geldentwertung, in: BFuP, 33. Jg. (1981), S. 97-114.

Ballwieser, Wolfgang (1995): Unternehmensbewertung und Steuern, in: *Elschen, Rainer/Siegel, Theodor/Wagner, Franz* (Hrsg.): Unternehmenstheorie und Besteuerung, FS Dieter Schneider, Wiesbaden 1995, S. 15-37.

Ballwieser, Wolfgang (1997): Kalkulationszinsfuß und Steuern, in: DB, 50. Jg. (1997), S. 2393-2396.

BMF (Hrsg.) (2003a): Erläuterungen zu den im Gesetz zum Abbau von Steuervergünstigungen und Ausnahmeregelungen (Steuervergünstigungsabbaugesetz - StVergAbG) entsprechend dem Gesetzesbeschluss des Deutschen Bundestages vom 21. Februar 2003 vorgesehenen steuerlichen Maßnahmen, im Internet verfügbar unter: http://www.bundesfinanzministerium.de/Anlage17296/Erlaeuterungen-zu-den-im-Gesetzesbe-schluss-BT-StVergAbG-vorgesehenen-steuerlichen-Massnahmen.pdf, Stand 2. Februar 2004.

BMF (Hrsg.) (2003b): Entwurf eines Gesetzes zur Neuregelung der Zinsbesteuerung und zur Förderung der Steuerehrlichkeit (Zinsabgeltungssteuergesetz – ZinsAbG), Referentenentwurf vom 17. März 2003, vormals im Internet verfügbar unter: http://www.bundesfinanzministerium.de/Anlage17724/Referentenentwurf_Zinsabgeltung_Stand_17032003.pdf, Stand 24. März 2003.

Breid, Volker (1994): Erfolgspotentialrechnung, Stuttgart 1994.

Brennan, Michael J. (1970): Taxes, Market Valuation and Corporate Financial Policy, in: NTJ, Vol. 23 (1970), S. 417-427.

Chen, Son-Nan (1986): Optimal Portfolio Selection under Differential Taxation: Simple Rules, in: QREB, Vol. 26 (1986), S. 6-16.

Constantinides, George M. (1983): Capital Market Equilibrium with personal Tax, in: Ec, Vol. 51 (1983), S. 611-636.

Dammon, Robert M./Dunn, Kenneth B./Spatt, Chester S. (1989): A Reexamination of the Value of Tax Options, in: Review of Financial Studies, Vol. 2 (1989), S. 341-372.

Dammon, Robert M./Green, Richard C. (1987): Tax Arbitrage and the Existence of Equilibrium Prices for Financial Assets, in: JF, Vol. 42 (1987), S. 1143-1166.

Dinstuhl, Volkmar (2002): Discounted-Cash-flow-Methoden im Halbeinkünfteverfahren, in: FB, 4. Jg. (2002), S: 79-90.

Dinstuhl, Volkmar (2003): Konzernbezogene Unternehmensbewertung, Wiesbaden 2003.

Drukarczyk, Jochen (1998): Unternehmensbewertung, 2. Aufl., München 1998.

Drukarczyk, Jochen (2003): Unternehmensbewertung, 4., überarbeitete und erweiterte Aufl., München 2003.

Drukarczyk, Jochen/Richter, Frank (1995): Unternehmensgesamtwert, anteilseignerorientierte Finanzentscheidungen und APV-Ansatz, in: DBW, 55. Jg. (1995), S. 559-580.

Drukarczyk, Jochen/Schüler, Andreas (2003): Kapitalkosten deutscher Aktiengesellschaften – eine empirische Untersuchung, in: FB, 5. Jg. (2003), S. 337-347.

Elton, Edwin J./Gruber, Martin J./Brown, Stephen J./Goetzmann, William N. (2003): Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, 6. Aufl., New York u.a. 2003.

Fama, Eugene F. (1977): Risk-adjusted Discount Rates and Capital Budgeting Under Uncertainty, in: JFE, Vol. 5 (1977), S. 3-24.

Fama, Eugene F. (1996): Discounting Under Uncertainty, in: JoB, Vol. 69 (1996), S. 415-428.

Friend, Irwin/Blume, Marshall E. (1975): The Demand for Risky Assets, in: AER, Vol. 65 (1975), S. 900-922.

Gordon, Myron J./Shapiro, Eli (1956): Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit, in: Management Science, Vol. 3 (1956), S. 102-110.

Gratz, Kurt (1981): Unternehmensbewertung bei progressiver Einkommensbesteuerung, in: zfbf, 33. Jg. (1981), S. 981-991.

Günther, Rolf (1998): Unternehmensbewertung: Kapitalisierungszinssatz nach Einkommensteuer bei Wachstum und Risiko, in: BB, 53. Jg. (1998), S. 1834-1842.

Hachmeister, Dirk (1998): Diskontierung bei Unsicherheit, in: *Kruschwitz, Lutz/Löffler, Andreas* (Hrsg.): Ergebnisse des Berliner Workshops „Unternehmensbewertung" vom 7. Februar 1998, S. 25-33.

Hachmeister, Dirk (2000): Der Discounted Cash Flow als Maß der Unternehmenswertsteigerung, 4., korrigierte Aufl., Frankfurt am Main 2000.

Hess, Patrick J. (1982): The Ex-Dividend Day Behavior of Stock Returns: Further Evidence on Tax Effects, in: JF, Vol. 37 (1982), S. 445-456.

Husmann, Sven/Kruschwitz, Lutz/Löffler, Andreas (2002): Unternehmensbewertung unter deutschen Steuern, in: DBW, 62. Jg. (2002), S. 24-42.

IDW (2000): IDW Standard: Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen (IDW S 1), in: WPg, 53. Jg. (2000), S. 825-842.

Jensen, Michael C. (1972): Capital Markets: Theory and Evidence, in: BJEconMSc, Vol. 3 (1972), S. 357-398.

Kalay, Avner/Michaely, Roni (2000): Dividends and Taxes: A Re-Examination, in: Financial Management, Vol. 29 (2000), S. 55-75.

Keim, Donald E. (1985): Dividend Yields and Stock Returns, Implications of Abnormal January Returns, in: JFE, Vol. 14 (1985), S. 473-489.

König, Rolf Jürgen (1990): Ausschüttungsverhalten von Aktiengesellschaften, Besteuerung und Kapitalmarktgleichgewicht, Hamburg 1990.

König, Wolfgang/Zeidler, Gernot W. (1996): Die Behandlung von Steuern bei der Unternehmensbewertung, in: DStR, 34. Jg. (1996), S. 1098-1103.

Kohl, Torsten/Schulte, Jörn (2000): Ertragswertverfahren und DCF-Verfahren, Ein Überblick vor dem Hintergrund des IDW S 1, in: WPg, 53. Jg. (2000), S. 1147-1164.

Kruschwitz, Lutz (2002): Finanzierung und Investition, 3., überarbeitete Aufl., München/Wien 2002.

Lally, Martin (1992): The CAPM under Dividend Imputation, in: Pacific Accounting Review, Vol. 4 (1992), S. 31-44.

Leuthier, Rainer (1988): Das Interdependenzproblem in der Unternehmensbewertung, Frankfurt am Main 1988.

Litzenberger, Robert H./Ramaswamy, Krishna (1979): The Effect of Personal Taxes and Dividends on Capital Asset Prices, in: JFE, Vol. 7 (1979), S. 163-195.

Löffler, Andreas (1998): Das CAPM mit Steuern, in: WiSt, 27. Jg. (1998), S. 420-422.

Löffler, Andreas (2001): Ein Paradox der Portfoliotheorie und vermögensunabhängige Nutzenfunktionen, Wiesbaden 2001.

Long, John B. (1977): Efficient Portfolio Choice With Differential Taxation of Dividends and Capital Gains, in: JFE, Vol. 5 (1977), S. 25-53.

Maier, Jürgen (2002): Unternehmensbewertung nach IDW S 1 - Konsistenz der steuerlichen Annahmen bei Anwendung des Halbeinkünfteverfahrens, in: FB, 4. Jg. (2002), S. 73-79.

Miller, Merton H. (1986): Behavioral Rationality in Finance: The Case of Dividends, in: JoB, Vol. 59 (1986), S. 451-468.

Miller, Merton H./Scholes, Myron S. (1982): Dividends and Taxes: Some Empirical Evidence, in: JPE, Vol. 90 (1982), S. 1118-1141.

Modigliani, Franco (1982): Debt, Dividend Policy, Taxes, Inflation and Market Valuation, in: JF, Vol. 37 (1982), S. 255-273.

Morgan, Ieuan G. (1982): Dividends and Capital Asset Prices, in: JF, Vol. 37 (1982), S. 1071-1086.

Moxter, Adolf (1983): Grundsätze ordnungsmäßiger Unternehmensbewertung, 2., vollst. umgearbeitete Aufl., Wiesbaden 1983.

Neumann, John von/Morgenstern, Oskar (1967): Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, 2., unveränderte Aufl., Würzburg 1967.

Niemann, Rainer/Sureth, Caren (2002): Taxation under Uncertainty – Problems of Dynamic Programming and Contingent Claims Analysis in Real Option Theory, Arbeitspapier, München 2002.

Ollmann, Michael/Richter, Frank (1999): Kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung und Einkommensteuer – Eine deutsche Perspektive im Kontext internationaler Praxis, in:

Kleineidam, Hans-Jochen (Hrsg.): Unternehmenspolitik und internationale Besteuerung, FS Lutz Fischer, Berlin 1999, S. 159-178.

Pratt, John W. (1964): Risk Aversion in the Small and in the Large, in: Ec, Vol. 32 (1964), S. 122-136.

Richter, Frank (1996): Die Finanzierungsprämissen des Equity-Ansatzes vor dem Hintergrund des APV-Ansatzes zur Bestimmung von Unternehmenswerten, in: zfbf, 48. Jg. (1996), S. 1076-1097.

Richter, Frank (1999): Konzeption eines marktwertorientierten Steuerungs- und Monitoringsystems, 2. überarbeitete und ergänzte Aufl., Frankfurt am Main u.a. 1999.

Richter, Frank (2002): Kapitalmarktorientierte Unternehmensbewertung, Frankfurt am Main u.a. 2002.

Richter, Frank (2003): Relativer Unternehmenswert und Einkommensteuer oder: Was ist paradox am Steuerparadoxon?, in: *Richter, Frank/Schüler, Andreas/Schwetzler, Bernhard* (Hrsg.): Kapitalgeberansprüche, Marktwertorientierung und Unternehmenswert, FS Jochen Drukarczyk, München 2003, S. 307-329.

Richter, Frank (2004): Valuation With or Without Personal Income Taxes?, in: sbr, Vol. 56 (2004), S. 20-45.

Rosenberg, Barr/Marathe, Vinay (1979): Tests of Capital Asset Pricing Hypotheses, in: RiF, Vol. 1 (1979), S. 115-223.

Rubinstein, Mark E. (1973): A Comparative Static Analysis of Risk Premiums, in: JoB, Vol. 46 (1973), S. 605-615.

Schaefer, Stephen M. (1982): Taxes and Security Market Equilibrium, in: *Sharpe, William F./Cootner, Cathryn M.* (Hrsg.): Financial Markets: Essays in Honor of Paul Cootner, New Jersey 1982, S. 159-178.

Schmidbauer, Rainer (2002): Der Kapitalisierungszinssatz in der Unternehmensbewertung nach dem StSenkG – Diskussion auf Irrwegen?, in: BB, 57. Jg. (2002), S. 1251-1257.

Schreiber, Ulrich (1987): Rechtsformabhängige Unternehmensbesteuerung?, Köln 1987.

Schüler, Andreas (1998): Performance-Messung und Eigentümerorientierung, Frankfurt am Main u.a. 1998.

Schultze, Wolfgang (2003): Methoden der Unternehmensbewertung, 2. erweiterte und überarbeitete Aufl., Düsseldorf 2003.

Schwetzler, Bernhard/Piehler, Maik (2004): Unternehmensbewertung bei Wachstum, Risiko und Besteuerung – die Anwendungsbedingungen der IDW S 1 Wachstumsformel, Arbeitspapier, Leipzig 2002, Version 1/2004.

Singer, Ronald F. (1979): Endogenous Marginal Income Tax Rates, Investor Behavior and the Capital Asset Pricing Model, in: JF, Vol. 34 (1979), S. 609-616.

Sureth, Caren/König, Rolf Jürgen (2000): Investitionen, Realoptionen und Steuern unter Unsicherheit, in: WISU, 29. Jg. (2000), S. 79-85.

Taggart, Robert A. (1991): Consistent Valuation and Cost of Capital Expressions With Corporate and Personal Taxes, in: Financial Management, Vol. 21 (1991), S. 8-20.

Weigel, Winfried (1989): Steuern bei Investitionsentscheidungen, Wiesbaden 1989.

Wiese, Jörg [Irrelevanz, 2003]: Bedingungen für die Irrelevanz persönlicher Steuern im Capital Asset Pricing Model mit deutschem Steuersystem, Arbeitspapier, Münchener Betriebswirtschaftliche Beiträge, Ludwig-Maximilians-Universität München 2003.

Münchner Betriebswirtschaftliche Beiträge

2000-01 **Hans-Peter Burghof / Christian Hofmann:** Executives´ Compensation of European Banks -Disclosure, Sensitivity and their Impact on Bank Performance, Juni 2000.

2000-02 **Gunther Friedl:** Sequential Investment and Time to Build, Juli 2000.

2000-03 **Hans-Ulrich Küppe**r: Cash Flow and Asset Based Interest Calculation in Cost Accounting, Juli 2000.

2000-04 **Nikolaus Franke / Christian Lüthje:** Studentische Unternehmensgründungen - dank oder trotz Förderung? - Kovarianzstrukturanalytische Erklärung studentischen Gründungsverhaltens anhand der Persönlichkeitskonstrukte “Risikopräferenz” und “Unabhängigkeitsstreben” sowie der subjektiven Wahrnehmung der Umfeldbedingungen, Juli 2000.

2000-05 **Burkhard Pedell:** Sunk Costs, Commitment and Strategy, August 2000.

2000-06 **Wolf Frowein:** On the Consistency of Mean-Lower Partial Moment Analysis and Expected Utility Maximisation, Oktober 2000.

2000-07 **Dietmar Harhoff / Joachim Henkel:** Profiting from voluntary information spillovers: How users benefit by freely revealing their innovations, Juli 2000.

2000-08 **Knieps Günter / Hans-Ulrich Küpper / Rene Langen:** Abschreibungen bei fallenden Wiederbeschaffungspreisen in stationären und nicht stationären Märkten, Dezember 2000.

2001-01 **Heinrich Martin Arnold:** Can great companies survive technology shocks? – A literature overview, Januar 2001.

2001-02 **Zsolt Berényi:** Accounting for illiquidity and non-normality of returns in the performance assessment, Juli 2001.

2001-03 **Michael Dobler:** Auditing Risk Management - A Critical Analysis of a German Particularity, Juli 2001.

2001-04 **Gunther Friedl / Robert Ott:** Anreizkompatible Gestaltung von Entgeltsystemen für Krankenhäuser, April 2001.

2001-05 **Hans-Ulrich Küpper:** Struktur und Teilsystem der Unternehmensrechnung, August 2001.

2001-06 **Claudia Küpper:** Service Innovation – A review of the state of the art, September 2001.

2001-07 **Christian Hofmann:** Anreizsysteme, September 2001.

2001-08 **Yvette Hofmann:** Sozialer Nutzen, Soziale Kosten, September 2001.

2001-09 **Gunther Friedl / Burkhard Pedell:** Anlagencontrolling, September 2001.

2001-10 **Hannes Wagner:** Der Wert interner Kapitalmärkte – empirische Überprüfung theoretischer Ansätze, Oktober 2001.

2001-11 **Nikolaus Franke:** How Communities Support Innovative Activities, Oktober 2001.

2001-12 **Joachim Henkel:** The Value of Weak Commitment, November 2001.

2001-13 **Gunther Friedl / Burkhard Pedell:** Integriertes Controlling mit SAP-Software, November 2001.

2001-14 **Heinrich Martin Arnold:** The recent history of the machine tool industry and the effects of technological change, November 2001.

2002-01 **Jörg Wiese:** Die Überprüfbarkeit individualistischer Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung, März 2002.

2002-02 **Gunther Friedl**: Growth Options, Organizational Slack, and Managerial Investment Incentives, April 2002.

2002-03 **Hans-Ulrich Küpper**: Internet Based Information Systems in the Non-Profit Sector, September 2002.

2002-04 **Hans-Ulrisch Küpper**: Management Mechanisms and Financing of Higher Education in Germany, September 2002.

2002-05 **Joachim Henkel:** The Risk-Return Paradox for Strategic Management: Disentangling True and Spurious Effects, Oktober 2002.

2002-06 **Marc Gruber:** Research on Marketing in Emerging Firms: Key Issues and Open Questions, November 2002.

2002-07 **Joachim Henkel:** Open Source Software from Commercial Firms Tools, Complements, and Collective Invention, November 2002.

2002-08 **Hans-Martin Zademach**: The Firm in Economic Geography zu einer integrierten Konzeption der Unternehmung, November 2002.

2003-01 **Hans-Peter Burghof / Tilo Kraus:** Post-IPO performance and the exit of venture capitalists, Januar 2003.

2003-02 **Nikolaus Franke / Marc Gruber / Dietmar Harhoff / Joachim Henkel**: What you are is what you like - similarity biases in venture capitalists evaluations of start-up teams, Januar 2003.

2003-03 **Jörg Wiese:** Bedingungen für die Irrelevanz persönlicher Steuern im Capital Asset Pricing Model mit deutschem Steuersystem, Mai 2003.

2003-04 **Markus Eberl / Manfred Schwaiger**: Corporate Reputation: Disentangling the Effects on Financial Performance, Oktober 2003.

2003-05 **Raimund Rix / Manfred Schwaiger:** Two-Mode Hierarchical Cluster Analysis - Evaluation of Goodness-of-Fit Measures, November 2003.

2004-01 **Jörg Wiese**: Unternehmensbewertung mit dem Nachsteuer-CAPM?, Februar 2004.

Jörg Wiese

Universität München

Seminar für Rechnungswesen und Prüfung

Ludwigstr. 28/RG

Tel.: +49-89-2180-2166

Fax.: +49-89-2180-6327

E-mail: wiese@bwl.uni-muenchen.de

http://www.rwp.bwl.uni-muenchen.de